

# Gleichgewichtsanlagen von Vielkörper- Satellitensystemen

Wittenburg, Jens

Veröffentlicht in:  
Abhandlungen der Braunschweigischen  
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 20, 1968,  
S. 198-278



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

# Gleichgewichtslagen von Vielkörper-Satellitensystemen\*)

Von Dipl.-Ing. Jens Wittenburg

Vorgelegt von Eduard Pestel

(Eingegangen am 20. 7. 1967)

## Lebenslauf

- |                        |  |
|------------------------|--|
| 1. 3. 1938             | geboren in Hamburg<br>Vater: Walter Wittenburg, Oberstudienrat in Hamburg<br>Mutter: Erika Wittenburg, geb. Reinmann   |
| 1945—1949              | Besuch der Volksschule in Schwarzenbek/Krs. Lauenburg  |
| 1949—1957              | Besuch der Hansa-Schule in Hamburg-Bergedorf (altsprachlicher Zug)   |
| 21. 2. 1957            | Abitur an der Hansa-Schule   |
| März—Sept. 1957        | Praktikum in der Wilhelmsburger Maschinenfabrik Hinrichs u. Sohn (Geesthacht) und in der Motorenfabrik Jastram (Hamburg-Bergedorf)                               |
| 22. 10. 1957           | Immatrikulation an der TH Hannover, Fakultät Maschinenwesen  |
| 29. 4. 1960            | Abschluß des Diplom-Vorexamens   |
| April 1960             | Aufnahme in die Studienstiftung des Deutschen Volkes; Einstellung als Hilfsassistent am Inst. f. Techn. Mechanik (Prof. Pestel)                                  |
| 21. 2. 1964            | Ausstellung der Diplomurkunde  |
| 11. 2.—30. 6. 1964     | Studium am Institut Henri Poincaré der Sorbonne/Paris  |
| 1. 9. 1964—30. 8. 1965 | Postgraduate-Student und Research Assistant an der University of California, Los Angeles; Beginn der Dissertation  |
| 6. 9. 1965—30. 6. 1966 | Teilnahme am Austausch von Nachwuchswissenschaftlern mit der UdSSR. Studium an der Lomonossow-Universität in Moskau und am Polytechnischen Institut in Leningrad |
| 1. 7.—1. 9. 1966       | Wissenschaftliche Hilfskraft am Lehrstuhl A für Mechanik (Prof. Pestel) der TH Hannover  |
| 1. 9. 1966—30. 1. 1967 | Verwalter einer Assistentenstelle am genannten Lehrstuhl   |
| ab 1. 2. 1967          | Wissenschaftlicher Assistent am genannten Lehrstuhl  |

## Liste der Formelzeichen

Die Liste führt nur die Größen auf, die mit wenigen Worten zu erläutern sind.

---

\*) Von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Hochschule Hannover zur Erlangung des Grades Doktor-Ingenieur genehmigte Dissertation.

Die Arbeit wurde angeregt von Herrn Prof. Dr. R. E. Roberson (University of California, Los Angeles) und abgeschlossen unter der Anleitung von Herrn Prof. Dr. Ing. E. Pestel (Technische Hochschule Hannover). Beiden Lehrern dankt der Verfasser für zahlreiche Anregungen und für das Interesse an den behandelten Problemen.

$n$	Anzahl der Körper des Systems
$m^{(i)}$	Masse des Körpers $i$
$M$	Masse des ganzen Systems
$\psi^{(i)}, \theta^{(i)}, \varphi^{(i)}$	Eulersche Winkelkoordinaten des Körpers $i$
$T, T_{\text{rot}}$	kinetische Energien des Systems
$V$	potentielle Energie des Systems
$\vec{x}_{1,2,3}, \vec{y}, \vec{z}$	Koordinateneinheitsvektoren
$\vec{e}^{(i)}_{1,2,3}$	
$\vec{e}^{(i)}$	körperfeste Koordinateneinheitsvektoren
$\vec{r}_0$	Spaltenmatrix der Vektoren $\vec{e}^{(i)}_{1,2,3}$
$\vec{R}^{(i)}$	Vektor vom Gravitationszentrum zum Massenmittelpunkt des Systems
$\vec{c}_{ia}$	Vektor vom Massenmittelpunkt des Systems zum Massenmittelpunkt des Körpers $i$
$\vec{B}_{ij}$	Vektor vom Massenmittelpunkt des Körpers $i$ zum Gelenk $a$ auf diesem Körper
$\vec{F}^{(i)}$	vom Baryzentrum ausgehender Vektor auf dem Körper $i$
$\vec{L}^{(i)}$	eingeprägte Kraft am Körper $i$
$\vec{H}^{(i)}$	eingepprägtes Moment am Körper $i$
$\vec{X}_a$	Drall des Körpers $i$
$\vec{N}^{(i)}$	Reaktionskraft im Gelenk $a$
$\vec{Y}_a$	Summe aller Gelenkkräfte an Körper $i$
$\vec{W}_a$	Reaktionsmoment im Gelenk $a$
$\vec{Q}_a$	Feder- und Dämpfermoment im Gelenk $a$
$\vec{I}^{(i)}$	Zwangsmoment im Gelenk $a$
$\mathbf{K}^{(i)} = \mathbf{I}^{(i)} + \Phi^{(i)}$	Trägheitsmatrix des Körpers $i$
$\Phi^{(i)}$	Trägheitsmatrix des erweiterten Körpers $i$
$\omega^{(i)}$	Steinerscher Anteil an $\mathbf{K}^{(i)}$
$\dot{\mathbf{q}}^{(i)}$	Spaltenmatrix der Komponenten der Winkelgeschwindigkeit von Körper $i$ in körperfesten Koordinaten
$\mathbf{G}^{(i)}$	Spaltenmatrix der generalisierten Geschwindigkeiten des Körpers $i$
$\Gamma^{(i)}$	Transformationsmatrix zwischen $\omega^{(i)}$ und $\dot{\mathbf{q}}^{(i)}$
$\Theta^{(i)}$	Matrix der Drei-Index-Symbole $\gamma^{(i)}_{nj}$
$\beta^{(i)}_{0,1,2,3}$	Transformationsmatrix zwischen den Koordinaten $\vec{x}_{1,2,3}$ und $\vec{e}^{(i)}_{1,2,3}$
$S$	reelle Parameter zur Beschreibung endlicher Drehungen des Körpers $i$
$T$	Inzidenzmatrix; beschreibt die Struktur des Systems
$C$	Linksinverse von $S$
$m$	Verknüpfungsmatrix; beschreibt die Lage der Gelenke auf den Körpern
$\mu$	diagonale Massenmatrix
$\Theta^{(i)}_1, \Theta^{(i)}_2, \Theta^{(i)}_3$	Massenverhältnismatrix
$\alpha, \beta, \gamma, \Delta, \Pi$	erste, zweite und dritte Spalte von $\Theta^{(i)}$
$\kappa$	Koeffizientenmatrizen der linearisierten Bewegungsgleichungen
$\omega_0$	Produkt aus universeller Gravitationskonstanter und Masse der Erde
	Umlaufwinkelgeschwindigkeit des Satelliten

## Einleitung

Die Drehbewegungen eines ausgedehnten starren Körpers im Newtonschen Gravitationsfeld wurden schon von *Euler* [1], *d'Alembert* [2], *Lagrange* [3], *Poisson* [4] und anderen Wissenschaftlern des 19. Jahrhunderts untersucht. Praktische Bedeutung hatte die Frage für den Astronomen. Die Libration des Mondes und die Präzession und Nutation der Erde werden verursacht durch die Gravitationsfelder von Sonne, Erde und Mond. Andere praktische Anwendungsmöglichkeiten gab es für die Theorie nicht. Infolgedessen beschränkten sich die wissenschaftlichen Arbeiten auf die Betrachtung nahezu kugelförmiger Körper auf fast kreisförmigen Bahnen.

Mit der Schaffung künstlicher Himmelskörper wurde das Interesse an dem alten Problem wieder lebendig. Es stellte sich nun in viel allgemeinerer Form. Die betrachteten Körper haben eine beliebige Massenverteilung. Die Anfangsbedingungen ihrer Bewegung sind willkürlich. Sie bewegen sich i. a. nicht auf kreisförmigen Umlaufbahnen. Ihre geringe Masse und häufig geringe Entfernung von der Erde erfordern darüber hinaus die Betrachtung von Lichtdruck, Wechselwirkung mit dem Magnetfeld der Erde und Luftwiderstand als Ursachen von Störungen der Bewegung.

Die Aufgabe wird noch schwieriger, wenn der Satellit ein Kreiselgerät an Bord hat, das mit gyroskopischen Momenten auf Drehbewegungen des Satelliten reagiert.

Die große technische Bedeutung des Problems ergibt sich aus der Tatsache, daß fast alle künstlichen Himmelskörper eine bestimmte Orientierung ausgezeichneter Achsen im Raum haben müssen, um ihre technische Aufgabe erfüllen zu können.

Eine Sonderstellung nehmen in diesem Zusammenhang solche Satelliten ein, die die Erde<sup>1)</sup> umkreisen und deren technische Aufgabe erfordert, daß eine ihrer Achsen mit großer Genauigkeit stets zum Erdmittelpunkt weist. Satelliten zur Wetterbeobachtung und zur Funkübertragung gehören z. B. hierzu.

*R. E. Roberson* schlug als erster 1956 vor, die Orientierung derartiger Satelliten nicht mit Hilfe eines notwendigerweise störanfälligen bordeigenen Regelungssystems zu überwachen, sondern das Gravitationsfeld der Erde als Regler einzusetzen.

Seitdem ist eine große Zahl von Veröffentlichungen erschienen, in denen die Gleichgewichtslagen, deren Stabilität und Störungen eines einzelnen starren Körpers mit oder ohne Rotor in seinem Innern auf kreisförmigen oder elliptischen Bahnen um die Erde untersucht werden (s. z. B. [5 bis 15]).

Die fortschreitende technische Entwicklung erfordert, Systeme von mehreren gelenkig aneinander gekoppelten Körpern zu untersuchen. Einige besonders einfach aufgebaute Systeme<sup>2)</sup> von zwei und drei Körpern sind bereits analysiert und technisch verwirklicht worden [16 bis 18]. Untersuchungen von

<sup>1)</sup> An die Stelle der Erde kann jeder andere natürliche Himmelskörper treten. Bei der Übertragung theoretisch gewonnener Aussagen ist nur zu prüfen, ob das Gravitationsfeld dieses Himmelskörpers die der Theorie zugrunde liegenden Annahmen hinreichend genau erfüllt.

<sup>2)</sup> Worin diese Einfachheit besteht, wird später deutlich.

$n$ -Körper-Systemen mit sehr allgemein formulierten Eigenschaften liegen bisher nur in geringer Zahl vor [19 bis 25]. Man kann vermuten, daß es eine Reihe von Arbeiten auf diesem Gebiet gibt, die aus Gründen der Geheimhaltung nicht veröffentlicht wurden.

### Thema der Dissertation

Gegenstand der vorliegenden Dissertation sind Systeme von  $n$  gelenkig miteinander gekoppelten Starrkörpern. Ein derartiges System befindet sich als Satellit in einer kreisförmigen Umlaufbahn um die Erde<sup>3)</sup>. Unter dem Einfluß des Gravitationsfeldes der Erde kann es in gewissen Stellungen der Körper zueinander und zu einem mit dem Massenmittelpunkt des Systems mitgeführten Koordinatensystem in Ruhe verharren. Die Bedingungen für das Auftreten derartiger Gleichgewichtslagen werden entwickelt. Spezielle Gruppen von Lösungen werden berechnet. Die Stabilität bzw. Instabilität der Gleichgewichtslagen wird in einer Betrachtung kleiner Störungen festgestellt.

Die Untersuchung setzt ein ideales zentrales Schwerkraftfeld ( $\sim 1/r^2$ ) voraus. Sie vernachlässigt alle neben den Gravitationswirkungen noch auftretenden eingepägten Kräfte und Momente wie z. B. Luftwiderstand, Lichtdruck, Wechselwirkung mit dem Magnetfeld der Erde usw.

Die abgeleiteten Beziehungen sind gültig für Systeme mit weitgehend unbeschränkter Freiheit des Aufbaus. Lediglich drei wenig einschränkende Bedingungen müssen erfüllt sein. Es sind dieselben Bedingungen, die bereits in den Arbeiten von *Hooker/Margoulis* [24] und von *Roberson/Wittenburg* [25] gestellt wurden. Sie lauten:

1. Das System von Körpern formt einen topologischen Baum.
2. Jeder Körper des Systems weist wenigstens einen Fixpunkt auf, der auch Fixpunkt eines anderen Körpers ist.
3. Alle Körper des Systems sind zeitlich unveränderliche Starrkörper.

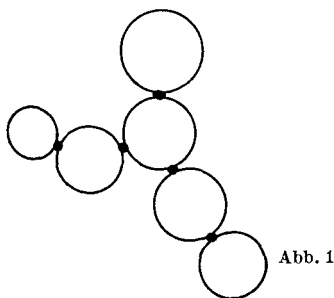


Abb. 1

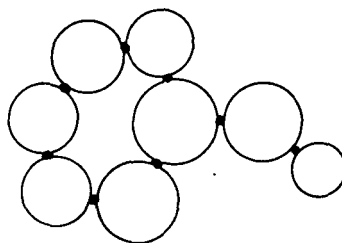


Abb. 2

Abb. 1 zeigt ein System, das die erste Bedingung erfüllt. Das System in Abb. 2 erfüllt sie nicht. Die Forderung nach der Struktur eines topologischen Baumes kann auch so ausgedrückt werden: Von einem beliebigen Körper des Systems zu einem beliebigen anderen gibt es genau einen Weg entlang einer Folge von

<sup>3)</sup> Siehe Fußnote 1 auf S. 200

Körpern und Gelenken, auf dem kein Körper oder Gelenk mehr als einmal betreten wird.

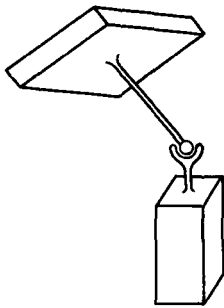


Abb. 3

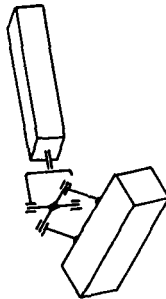


Abb. 4

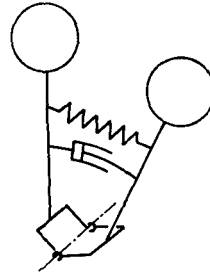


Abb. 5

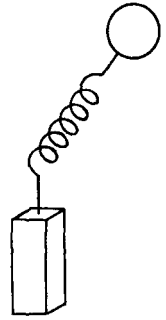


Abb. 6

Die zweite Bedingung ist eine Vorschrift über die kinematischen Eigenschaften der Bindungen zwischen den Körpern des Systems. Die Abb. 3, 4 und 5 stellen drei zulässige, Abb. 6 stellt eine unzulässige Bindung dar. Die ersten drei Bindungen haben drei, zwei bzw. einen Freiheitsgrad der relativen Drehung der beiden Körper. Die Bindungen der Abb. 3 und 4 weisen genau einen Punkt auf, der Fixpunkt beider Körper ist. Wir nennen diesen Punkt den Gelenkpunkt. Die Bindung nach Abb. 5 hat beliebig viele, beiden Körpern gemeinsame Fixpunkte. Einen beliebigen unter ihnen erklären wir zum Gelenkpunkt.

Der Fall, daß drei oder mehr Körper einen allen gemeinsamen Gelenkpunkt haben, wird nicht ausgeschlossen.

Die dritte Bedingung schließt den Massentransport innerhalb des Systems und die Veränderung der Gesamtmasse des Systems, etwa durch Zünden eines Raketenmotors, aus.

### Bemerkungen zur Schreibweise

In dieser Arbeit ist von Vektoren, von deren Komponentendarstellung in bestimmten (stets rechtshändigen, kartesischen/ Koordinatensystemen, von Matrizen und Determinanten die Rede. Die gewählte Schreibweise ermöglicht es, den Charakter einer Größe zu identifizieren. Dazu einige Erläuterungen:

**1. Vektoren:**  $\vec{\omega}$  bezeichnet einen Vektor im dreidimensionalen Raum ohne Bezug auf ein bestimmtes Koordinatensystem. Obere und untere Indizes, z. B. in  $\vec{\omega}^{(i)}$  oder  $\vec{\omega}_0$ , gehören zum Namen des Vektors. Sie bezeichnen nicht eine seiner Komponenten. Der Betrag von  $\vec{\omega}$  ist  $\omega$ .

Die Komponenten eines Vektors in einem bestimmten Koordinatensystem werden stets in einer Spaltenmatrix angeordnet und durch eine fettgedruckte Größe abgekürzt.

Beispiel:  $\boldsymbol{\omega}^{(i)} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}^{(i)}$  ist eine Komponentendarstellung des Vektors  $\vec{\omega}^{(i)}$ .

Das zugrunde liegende Koordinatensystem ist dem Symbol  $\omega^{(t)}$  nicht anzusehen. Es muß extra vereinbart werden.

**2. Matrizen:** Wie die bereits eingeführten Spaltenmatrizen werden alle Matrizen unabhängig von ihrem Format durch fettgedruckte Größen benannt. Beispiele sind  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}^*$ ,  $\mathbf{m}$ . Die Transponierte von  $\mathbf{C}$  ist  $\mathbf{C}^T$ . Die Elemente einer Matrix, z. B.  $\mathbf{A}$ , werden mit  $A_{ij}$  bezeichnet. Dabei gibt der erste Index die Zeile an.

Um Verwechslungen zu vermeiden, ist nie von Spaltenvektor oder gar Vektor die Rede, wenn eine Spaltenmatrix gemeint ist. Eine Spaltenmatrix mit  $n$  Elementen  $a_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) kann auch mit dem Symbol  $\|a_k\|_{k=1, \dots, n}$  gekennzeichnet werden, wenn kein besonderer Name geprägt werden soll.

Viele Matrizen lassen sich aufteilen in  $(3 \times 1)$ - oder  $(3 \times 3)$ -Untermatrizen, deren jede einzeln bezeichnet werden muß. Das geschieht durch doppelte Indizierung unterstrichener Größen. Ein Beispiel: Die  $(3n \times 3n)$ -Matrix  $\mathbf{J}$  ist aufteilbar in die  $(3 \times 3)$ -Untermatrizen  $\mathbf{J}_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ). Die Elemente von  $\mathbf{J}_{ij}$  werden folgerichtig mit  $J_{ij\alpha\beta}$  bezeichnet.

Eine Sonderstellung nehmen Matrizen ein, deren Elemente Vektoren sind. Sie werden durch einen Pfeil über dem fettgedruckten Namen gekennzeichnet. Ein Beispiel:  $\vec{\mathbf{e}}$ . Für die Multiplikation zweier derartiger Matrizen miteinander werden folgende Verknüpfungssymbole und Rechenregeln vereinbart:

Sei  $\vec{\mathbf{A}}$  eine  $(m \times n)$ -Matrix,  $\vec{\mathbf{B}}$  eine  $(n \times p)$ -Matrix. Die Elemente von  $\vec{\mathbf{A}}$  und  $\vec{\mathbf{B}}$  sind die Vektoren  $\vec{a}_{ik}$  bzw.  $\vec{b}_{kj}$ .  $\vec{\mathbf{A}} \odot \vec{\mathbf{B}}$  und  $\vec{\mathbf{A}} \otimes \vec{\mathbf{B}}$  sind zwei verschiedene  $(m \times p)$ -Matrizen, deren Elemente sich berechnen zu

$$(\vec{\mathbf{A}} \odot \vec{\mathbf{B}})_{ij} = \sum_{k=1}^n \vec{a}_{ik} \cdot \vec{b}_{kj},$$

$$(\vec{\mathbf{A}} \otimes \vec{\mathbf{B}})_{ij} = \sum_{k=1}^n \vec{a}_{ik} \times \vec{b}_{kj}.$$

**3. Determinanten:** Die Determinante einer Matrix  $\mathbf{A}$  wird durch  $\text{Det } \mathbf{A}$  bezeichnet.

## 1. Die Differentialgleichungen der Bewegung

In der Arbeit „A Dynamical Formalism for an Arbitrary Number of Interconnected Rigid Bodies, with Reference to the Problem of Satellite Attitude Control“ von Roberson/Wittenburg [25] wurden die Differentialgleichungen der Drehbewegungen eines Systems von Körpern der hier betrachteten Art mit Methoden der Vektormechanik hergeleitet. Eine in manchen Teilen leichter verständliche, verbesserte Fassung dieser Entwicklung wird im Anhang der Dissertation dargestellt.

In diesem Kapitel wird gezeigt, wie dieselben Bewegungsgleichungen mit Hilfe des Lagrangeschen Formalismus zu gewinnen sind. Beide Methoden geben in spezifischer Weise Einblick in das mechanische Problem. Die Vektormethode liefert als willkommene Nebenergebnisse Ausdrücke für die im System wirkenden Kräfte und Momente, die Lagrangesche Methode setzt übersichtliche

Ausdrücke für die kinetische und potentielle Energie voraus. Diese Forderung führt zu neuen Formulierungen dieser Größen.

### 1.1. Die Ableitung der Bewegungsgleichungen dargestellt am Beispiel des einzelnen starren Körpers

Die Herleitung der Differentialgleichungen für nichtebene Rotationsbewegungen starrer Körper mit Hilfe der Lagrangeschen Methode weist einige besondere Schwierigkeiten und Merkmale auf. Es erscheint nützlich, diese zunächst an dem klassischen Fall der Drehbewegungen eines einzelnen starren Körpers zu demonstrieren.

Als generalisierte Koordinaten zur Beschreibung der Lage des Körpers in einem Inertialsystem  $x, y, z$  können die Eulerschen Winkel  $\psi, \vartheta, \varphi$  verwendet werden (Abb. 7). Die Bewegungsgleichungen — ausgedrückt durch Differentialgleichungen in  $\psi, \vartheta, \varphi$  — sind nicht übersichtlich. Insbesondere lassen sie keine Symmetrie erkennen. Die Ursache dafür ist die unsymmetrische Zuordnung der Drehachsen  $\vec{\psi}, \vec{\vartheta}, \vec{\varphi}$ .

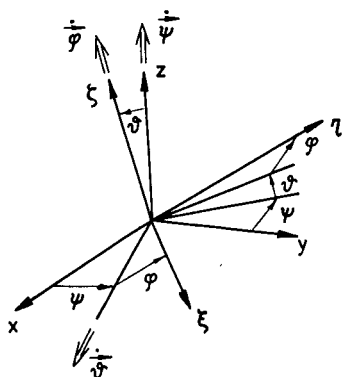


Abb. 7

Die Bewegungsgleichungen finden ihre einfachste Gestalt in der Form der Eulerschen Gleichungen

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 &= M_1, \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 &= M_2, \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 &= M_3. \end{aligned}$$

Sie lassen sich in Matrizenform wie folgt schreiben

$$\begin{bmatrix} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix},$$

oder abgekürzt

$$I \dot{\omega} + \tilde{\omega} I \omega = M. \quad (1.1-1)$$



Hierin ist  $\mathbf{I}$  die Diagonalmatrix der Hauptträgheitsmomente. Dieselbe Matrizen-gleichung ist jedoch auch dann gültig, wenn  $\mathbf{I}$  die Trägheitsmatrix zu einem beliebigen körperfesten Achsensystem durch den Massenmittelpunkt ist. Die Spaltenmatrizen  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  und  $\mathbf{M}$  enthalten dann die Komponenten in diesen drei Achsenrichtungen.

Die Variablen  $\omega_{1,2,3}$  in diesen Gleichungen sind Geschwindigkeiten; sie können jedoch nicht als generalisierte Geschwindigkeiten angesehen werden, die sich aus bestimmten drei generalisierten Koordinaten durch Differentiation ergeben. Sie lassen sich lediglich als eine Linearkombination generalisierter Geschwindigkeiten darstellen, etwa in der Form

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}(\psi, \vartheta, \varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \mathbf{G} \dot{\mathbf{q}}, \quad (1.1-2)$$

wobei  $\psi, \vartheta, \varphi$  die Winkel nach Abb. 7 sein können. Diese Matrixengleichung ist nicht integrierbar, was eben ausdrückt, daß  $\omega_{1,2,3}$  nicht generalisierte Geschwindigkeiten sind. Man nennt sie Quasigeschwindigkeiten<sup>4)</sup>.

Für die generalisierten Koordinaten von Abb. 7 ist

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \sin \vartheta \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \cos \vartheta & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.1-3)$$

Die Kehrmatrix ist

$$\mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} & \frac{\cos \varphi}{\sin \vartheta} & 0 \\ \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ -\operatorname{ctg} \vartheta \sin \varphi & -\operatorname{ctg} \vartheta \cos \varphi & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.1-4)$$

Im folgenden wird dargestellt, wie mit Hilfe des Lagrangeschen Formalismus die Eulerschen Gleichungen (1.1-1) gefunden werden.

In Matrizenform ist die kinetische Energie darstellbar als

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}. \quad (1.1-5)$$

Substitution von Gl. (1.1-2) ergibt

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{G}^T \mathbf{I} \mathbf{G} \dot{\mathbf{q}}. \quad (1.1-6)$$

Damit erhält man zunächst

$$\left\| \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right\|_{k=1, \dots, 3} = \mathbf{G}^T \mathbf{I} \mathbf{G} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}.$$

<sup>4)</sup> Siehe Lur'e [26].

Es ergibt sich weiterhin

$$\left\| \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) \right\|_{k=1, \dots, 3} = \mathbf{G}^\top \mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{G}}^\top \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}.$$

Ebenso erhält man

$$\left\| \frac{\partial T}{\partial q_k} \right\|_{k=1, \dots, 3} = \frac{1}{2} \left\| \dot{\mathbf{q}}^\top \frac{\partial}{\partial q_k} (\mathbf{G}^\top \mathbf{I} \mathbf{G}) \dot{\mathbf{q}} \right\|_{k=1, \dots, 3}.$$

Darin ist

$$\frac{\partial}{\partial q_k} (\mathbf{G}^\top \mathbf{I} \mathbf{G}) = \frac{\partial \mathbf{G}^\top}{\partial q_k} \mathbf{I} \mathbf{G} + \mathbf{G}^\top \mathbf{I} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q_k} = \left( \mathbf{G}^\top \mathbf{I} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q_k} \right) + \left( \mathbf{G}^\top \mathbf{I} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q_k} \right)^\top,$$

so daß

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial T}{\partial q_k} \right\|_{k=1, \dots, 3} &= \frac{1}{2} \left\| \dot{\mathbf{q}}^\top \left[ \left( \mathbf{G}^\top \mathbf{I} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q_k} \right) + \left( \mathbf{G}^\top \mathbf{I} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q_k} \right)^\top \right] \dot{\mathbf{q}} \right\|_{k=1, \dots, 3} \\ &= \frac{1}{2} \left\| \boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{G}^{-1\top} \left[ \left( \mathbf{G}^\top \mathbf{I} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q_k} \right) + \left( \mathbf{G}^\top \mathbf{I} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q_k} \right)^\top \right] \mathbf{G}^{-1} \boldsymbol{\omega} \right\|_{k=1, \dots, 3} \\ &= \frac{1}{2} \left\| \left( \boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{I} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q_k} \mathbf{G}^{-1} \boldsymbol{\omega} \right) + \left( \boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{I} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q_k} \mathbf{G}^{-1} \boldsymbol{\omega} \right)^\top \right\|_{k=1, \dots, 3} \\ &= \left\| \boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{G}^{-1\top} \frac{\partial \mathbf{G}^\top}{\partial q_k} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \right\|_{k=1, \dots, 3}, \end{aligned}$$

denn jeder Klammerausdruck ist eine einfache Zahl und daher gleich seiner Transponierten. Die aus  $T$  sich herleitenden Glieder in der Lagrangeschen Gleichung lauten also

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right\|_{k=1, \dots, 3} &= \mathbf{G}^\top \mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{G}}^\top \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} - \\ &\quad - \left\| \boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{G}^{-1\top} \frac{\partial \mathbf{G}^\top}{\partial q_k} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \right\|_{k=1, \dots, 3}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist gleich der Spaltenmatrix der generalisierten Kräfte, d. h. gleich der Spaltenmatrix

$$\begin{bmatrix} M_v \\ M_\theta \\ M_\varphi \end{bmatrix}$$

der Komponenten des am Körper angreifenden Moments. Multipliziert man diese Gleichung von links her mit  $\mathbf{G}^{-1\top}$ , dann ergibt sich

$$\mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{G}^{-1\top} \dot{\mathbf{G}}^\top \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} - \mathbf{G}^{-1\top} \left\| \boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{G}^{-1\top} \frac{\partial \mathbf{G}^\top}{\partial q_k} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \right\|_{k=1, \dots, 3} = \mathbf{M}.$$

Darin ist  $\mathbf{M}$  die Spaltenmatrix der Komponenten des Moments gemessen im körperfesten Achsensystem  $\xi, \eta, \zeta$ . Ein Vergleich mit Gl. (1.1-1) zeigt, daß die Gleichung

$$\mathbf{G}^{-1\top} \dot{\mathbf{G}}^\top \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} - \mathbf{G}^{-1\top} \left\| \boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{G}^{-1\top} \frac{\partial \mathbf{G}^\top}{\partial q_k} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \right\|_{k=1, \dots, 3} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \quad (1.1-7)$$

nachzuweisen ist.

Das  $i$ -te Element der Spaltenmatrix  $\mathbf{G}^{-1\top} \dot{\mathbf{G}}^\top \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}$  ist

$$(\mathbf{G}^{-1\top} \dot{\mathbf{G}}^\top \mathbf{I} \boldsymbol{\omega})_i = \sum_{j,l=1}^3 G_{li}^{-1} \dot{G}_{jl} (\mathbf{I} \boldsymbol{\omega})_j$$

mit

$$\begin{aligned} \dot{G}_{jl} &= \sum_{m=1}^3 \frac{\partial G_{jl}}{\partial q_m} \dot{q}_m \\ &= \sum_{m,n=1}^3 \frac{\partial G_{jl}}{\partial q_m} G_{mn}^{-1} \omega_n, \end{aligned}$$

also ist

$$(\mathbf{G}^{-1\top} \dot{\mathbf{G}}^\top \mathbf{I} \boldsymbol{\omega})_i = \sum_{j,l,m,n=1}^3 \omega_n G_{li}^{-1} G_{mn}^{-1} \frac{\partial G_{jl}}{\partial q_m} (\mathbf{I} \boldsymbol{\omega})_j. \quad (1.1-8)$$

Ebenso erhält man für das  $i$ -te Element der Spaltenmatrix

$$\mathbf{G}^{-1\top} \left\| \boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{G}^{-1\top} \frac{\partial \mathbf{G}^\top}{\partial q_k} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \right\|_{k=1, \dots, 3}$$

den Ausdruck

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{G}^{-1\top} \left\| \boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{G}^{-1\top} \frac{\partial \mathbf{G}^\top}{\partial q_k} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \right\|_{k=1, \dots, 3} \right)_i &= \\ &= \sum_{j,l,m,n=1}^3 \omega_n G_{li}^{-1} G_{mn}^{-1} \frac{\partial G_{jm}}{\partial q_l} (\mathbf{I} \boldsymbol{\omega})_j. \end{aligned} \quad (1.1-9)$$

Die Gln. (1.1-8) und (1.1-9) liefern die Differenz

$$\begin{aligned} (\mathbf{G}^{-1\top} \dot{\mathbf{G}}^\top \mathbf{I} \boldsymbol{\omega})_i - \left( \mathbf{G}^{-1\top} \left\| \boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{G}^{-1\top} \frac{\partial \mathbf{G}^\top}{\partial q_k} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \right\|_{k=1, \dots, 3} \right)_i &= \\ &= \sum_{j,l,m,n=1}^3 \omega_n G_{li}^{-1} G_{mn}^{-1} \left( \frac{\partial G_{jl}}{\partial q_m} - \frac{\partial G_{jm}}{\partial q_l} \right) (\mathbf{I} \boldsymbol{\omega})_j \\ &= \boldsymbol{\omega}^\top \boldsymbol{\Gamma}^{(i)} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (1.1-10)$$

mit der schiefssymmetrischen  $(3 \times 3)$ -Matrix  $\boldsymbol{\Gamma}^{(i)}$ , deren Elemente  $\gamma_{nj}^{(i)}$  lauten

$$\gamma_{nj}^{(i)} = \sum_{l,m=1}^3 G_{li}^{-1} G_{mn}^{-1} \left( \frac{\partial G_{jl}}{\partial q_m} - \frac{\partial G_{jm}}{\partial q_l} \right).$$

Das sind die sog. Drei-Index-Symbole, die zuerst von *Boltzmann* [27] und *Hamel* [28] eingeführt wurden. Im vorliegenden Fall berechnen sich mit den Gln. (1.1-3) und (1.1-4) die Matrizen  $\mathbf{\Gamma}^{(1)}$ ,  $\mathbf{\Gamma}^{(2)}$ ,  $\mathbf{\Gamma}^{(3)}$  zu<sup>5)</sup>

$$\mathbf{\Gamma}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{\Gamma}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{\Gamma}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.1-11)$$

Damit sind die nur als Hilfsgrößen benutzten generalisierten Koordinaten  $\psi, \vartheta, \varphi$  wieder eliminiert. Mit den Gln. (1.1-10) und (1.1-11) erkennt man sofort, daß in der Tat Gl. (1.1-7) erfüllt ist.

## 1.2. Die kinetische Energie des n-Körper-Systems

Wenden wir uns nun der Betrachtung eines Systems von  $n$  gekoppelten Starrkörpern zu. Das Ziel der Untersuchung ist ein System von  $3n$  skalaren Differentialgleichungen, die als Variable die Komponenten der Winkelgeschwindigkeiten der Körper in körperfesten Achsensystemen enthalten. Wegen der Kopplung der Körper werden weitere Variable auftreten in Gestalt der Transformationsmatrizen zwischen den  $n$  körperfesten Koordinatensystemen. Zu den dynamischen Differentialgleichungen treten andererseits kinematische Differentialgleichungen hinzu, so daß das System von Bestimmungsgleichungen vollständig ist.

Die Anwendung der Lagrangeschen Gleichungen setzt die Kenntnis der kinetischen und potentiellen Energien des Systems voraus. Im folgenden wird zunächst die kinetische Energie bestimmt.

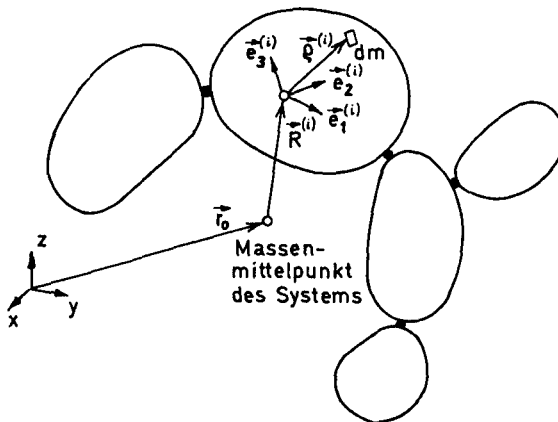


Abb. 8

Die Lage des Massenmittelpunktes des Systems in einem Inertialsystem  $x, y, z$  wird durch den Vektor  $\vec{r}_0$  beschrieben (s. Abb. 8).  $\vec{R}^{(i)}$  ist der Vektor vom Massenmittelpunkt des Systems zum Massenmittelpunkt des Körpers  $i$ .  $\vec{\rho}^{(i)}$  schließlich weist vom Massenmittelpunkt des Körpers  $i$  zu einem seiner Masse-

<sup>5)</sup> Zur einfachsten Berechnung der Drei-Index-Symbole s. [26].

teilchen  $dm$ .  $\vec{e}_1^{(i)}$ ,  $\vec{e}_2^{(i)}$ ,  $\vec{e}_3^{(i)}$  sind die Einheitsvektoren eines körperfesten Koordinatensystems mit Ursprung im Massenmittelpunkt.

Die kinetische Energie des Systems ausgedrückt in diesen Größen ist

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{m^{(i)}} (\dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{R}}^{(i)} + \dot{\vec{\varrho}}^{(i)})^2 dm \\ &= \frac{1}{2} \left[ \dot{\vec{r}}_0^2 \sum_{i=1}^n m^{(i)} + \sum_{i=1}^n \dot{\vec{R}}^{(i)2} m^{(i)} + \sum_{i=1}^n \int_{m^{(i)}} \dot{\vec{\varrho}}^{(i)2} dm \right] + \\ &\quad + \dot{\vec{r}}_0 \cdot \left[ \sum_{i=1}^n (\dot{\vec{R}}^{(i)} m^{(i)} + \int_{m^{(i)}} \dot{\vec{\varrho}}^{(i)} dm) \right] + \sum_{i=1}^n \dot{\vec{R}}^{(i)} \cdot \int_{m^{(i)}} \dot{\vec{\varrho}}^{(i)} dm . \end{aligned}$$

Darin ist  $\sum_{i=1}^n m^{(i)} = M$  die Masse des gesamten Systems. Wegen der Wahl der Massenmittelpunkte als Bezugspunkte ist

$$\sum_{i=1}^n \dot{\vec{R}}^{(i)} m^{(i)} = 0 \quad \text{und} \quad \int_{m^{(i)}} \dot{\vec{\varrho}}^{(i)} dm = 0 ,$$

so daß man erhält

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{\vec{R}}^{(i)2} m^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{m^{(i)}} \dot{\vec{\varrho}}^{(i)2} dm . \quad (1.2-1)$$

In dem im nächsten Kapitel herzuleitenden Ausdruck für die potentielle Energie werden alle Glieder höherer als zweiter Ordnung in  $\varrho^{(i)}/r_0$  und  $R^{(i)}/r_0$  vernachlässigt. Damit wird die schwache Kopplung zwischen der Bewegung des Massenmittelpunktes des Systems und den Drehbewegungen der Körper beseitigt. Infolgedessen ist das erste Glied in dem Ausdruck für  $T$  ohne Einfluß auf die Drehbewegungen. Es bestimmt (zusammen mit einem Anteil der potentiellen Energie) die Bahn des Massenmittelpunktes, die wir von vornherein als gegeben, nämlich kreisförmig voraussetzen. Daher interessiert uns im folgenden nur der Rest von  $T$ , den wir die kinetische Energie der Rotation nennen können.

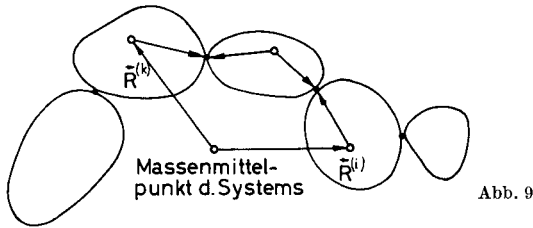
$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{\vec{R}}^{(i)2} m^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{m^{(i)}} \dot{\vec{\varrho}}^{(i)2} dm . \quad (1.2-2)$$

Das zweite Glied dieser Summe ist in Matrizenform darstellbar als

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{m^{(i)}} \dot{\vec{\varrho}}^{(i)2} dm = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\omega}^{(i)\top} \mathbf{I}^{(i)} \boldsymbol{\omega}^{(i)} , \quad (1.2-3)$$

wobei unter  $\boldsymbol{\omega}^{(i)}$  die Spaltenmatrix der Komponenten der Winkelgeschwindigkeit von Körper  $i$  und unter  $\mathbf{I}^{(i)}$  seine Trägheitsmatrix verstanden wird, beides gemessen in dem mit Körper  $i$  fest verbundenen Achsensystem  $\vec{e}_{1,2,3}^{(i)}$ .

Betrachten wir nun das erste Glied in der Gl. (1.2-2). Abb. 9 zeigt, daß die Differenzvektoren  $\vec{R}^{(i)} - \vec{R}^{(k)}$  dargestellt werden können als Summen körper-



fester Vektoren. Es liegt daher nahe, die  $\dot{\vec{R}}^{(i)}$  durch die Ableitungen körperfester Vektoren zu ersetzen. Man erkennt bereits, daß auf diese Weise die Winkelgeschwindigkeiten  $\vec{\omega}^{(i)}$  in Erscheinung treten. Im folgenden werden die Grundlagen für ein systematisches Verfahren zur Elimination der  $\dot{\vec{R}}^{(i)}$  geschaffen.

### 1.2.1. Matrizen zur Beschreibung der Struktur des Systems

Wir betrachten ein System von  $n$  Körpern. Es hat  $n - 1$  Gelenkpunkte. Man nummeriere die Körper von 1 bis  $n$  und die Gelenkpunkte von 1 bis  $n - 1$ . Die Zuordnung der Nummern kann in beliebiger Weise erfolgen, viele Formulierungen werden jedoch einfacher, wenn Körper Nummer 1 ein Körper am Rand des Systems ist. Er wird später als Bezugskörper benutzt.

Um die Unterscheidung zu erleichtern, sollen im folgenden Körper stets durch die Indizes  $i, j, k$  und Gelenke durch die Indizes  $a, b, c$  gekennzeichnet werden.

In eindeutig umkehrbarer Weise wird nun dem Körpersystem ein Graph zugeordnet, dessen  $n$  Scheitel  $s_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) die Massenmittelpunkte der Körper und dessen  $n - 1$  Bögen  $u_a$  ( $a = 1, \dots, n - 1$ ) die Gelenkpunkte des Systems symbolisieren. Den Bögen werden Richtungen zugeordnet derart, daß alle Pfeile auf den Scheitel Nummer 1 weisen. Auch dieser Graph hat die Struktur eines Baumes. Abb. 10 zeigt ein System von Körpern und den zugehörigen Graph.

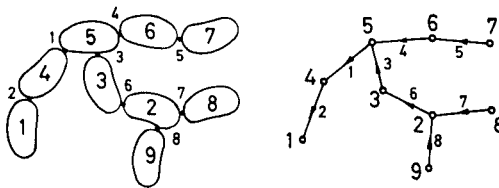


Abb. 10

Die kleinste Folge von Bögen, die zwei Scheitel verbindet, nennen wir den direkten Zweig zwischen diesen Scheiteln. Die Einführung der Ordnungssymbole  $\leq$  und  $<$  vereinfacht zahlreiche Formulierungen. Sie sind definiert durch die Eigenschaft, daß  $s_i \leq s_j$ , wenn  $s_i$  auf dem direkten Zweig von  $s_1$  nach  $s_j$  liegt einschließlich der Möglichkeiten  $s_i = s_1$  und  $s_i = s_j$ .  $s_i < s_j$  schließt  $s_i = s_j$  aus. Man beachte, daß  $s_i \leq s_j$  und  $s_j < s_i$  zwar einander ausschließen, sich jedoch nicht gegenseitig ergänzen. In Abb. 10 ist weder  $s_7 \leq s_8$  noch  $s_8 < s_7$ .

Die Inzidenzmatrix  $\mathbf{S}$ , eine  $[n \times (n - 1)]$ -Matrix mit den Elementen  $S_{ia}$  ist definiert durch die Vorschrift

$$S_{ia} = \begin{cases} +1, & \text{wenn } u_a \text{ bei } s_i \text{ beginnt} \\ -1, & \text{wenn } u_a \text{ bei } s_i \text{ endet} \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases} \quad (1.2.1-1)$$

Wir definieren weiterhin eine  $[(n - 1) \times n]$ -Matrix  $\mathbf{T}$  mit den Elementen

$$T_{ai} = \begin{cases} +1, & \text{wenn } u_a \text{ auf dem direkten Zweig zwischen } s_i \text{ und } s_1 \text{ liegt} \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases} \quad (1.2.1-2)$$

Für den Graph von Abb. 10a lauten die Matrizen  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{T}$  wie folgt:

$$\mathbf{S} = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & & -1 & & & & & & \\ 2 & & & & & & 1 & -1 & -1 \\ 3 & & & 1 & & & & -1 & \\ 4 & & -1 & 1 & & & & & \\ 5 & 1 & & & -1 & -1 & & & \\ 6 & & & & & 1 & -1 & & \\ 7 & & & & & & 1 & & \\ 8 & & & & & & & 1 & \\ 9 & & & & & & & & 1 \end{array} ; \quad \mathbf{T} = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & & & 1 & 1 & & & & 1 & 1 \\ 4 & & & & 1 & & & & & 1 \\ 5 & & & & & 1 & 1 & & & \\ 6 & & & & & & 1 & & & \\ 7 & & & & & & & 1 & & \\ 8 & & & & & & & & 1 & \\ 9 & & & & & & & & & 1 \end{array}$$

Abb. 10a

Wir benötigen später eine  $[3n \times (n - 1)]$ -Matrix  $\mathbf{C}$ , die in ihrer Struktur eng mit der Matrix  $\mathbf{S}$  verwandt ist. Da sie die Lage der Gelenkpunkte auf den Körpern beschreibt, nennen wir sie die Bindungsmatrix.

Wir bezeichnen den Vektor vom Massenmittelpunkt des Körpers  $i$  zu einem Gelenkpunkt  $a$  auf diesem Körper mit  $\vec{c}_{ia}$ . Die dreizeilige Spaltenmatrix seiner Komponenten im Achsensystem  $\vec{e}_{1,2,3}^{(i)}$  sei  $\mathbf{c}_{ia}$  genannt. Die Matrix  $\mathbf{C}$ , unterteilt als  $[n \times (n - 1)]$ -Matrix mit Untermatrizen  $\mathbf{C}_{ia}$ , ist definiert durch die Vorschrift

$$\mathbf{C}_{ia} = \begin{cases} + \mathbf{c}_{ia}, & \text{wenn } S_{ia} = +1 \\ - \mathbf{c}_{ia}, & \text{wenn } S_{ia} = -1 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \text{wenn } S_{ia} = 0 \end{cases} \quad (1.2.1-3)$$

### 1.2.2. Matrizen zur Beschreibung der Massenverteilung des Systems

Wir definieren eine  $n$ -zeilige, quadratische Diagonalmatrix  $\mathbf{m}$ , deren Diagonalelemente die Massen  $m^{(i)}$  der einzelnen Körper sind:

$$m_{ij} = m^{(i)} \delta_{ij}. \quad (1.2.2-1)$$

Weiterhin wird eine  $n$ -zeilige, quadratische Massenverhältnismatrix  $\boldsymbol{\mu}$  gebraucht, deren Elemente lauten

$$\mu_{ij} = \delta_{ij} - \frac{m^{(i)}}{M}. \quad (1.2.2-2)$$

Die Matrix  $\mu$  ist singulär, denn die Summe aller Zeilen ergibt eine Null-Zeile. Schließlich ist  $\mathbf{I}$  eine  $(3n \times 3n)$ -Matrix, in der die Trägheitsmatrizen  $\mathbf{I}^{(i)}$  entlang der Hauptdiagonale angeordnet sind, d. h. eine Matrix mit den  $(3 \times 3)$ -Untermatrizen<sup>6)</sup>

$$\mathbf{I}_{ij} = \mathbf{I}^{(i)} \delta_{ij}. \quad (1.2.2-3)$$

### 1.2.3. Matrizen zur Beschreibung der Lage des Systems

Die Einheitsvektoren  $\vec{e}_{1,2,3}^{(i)}$  des mit dem Körper  $i$  fest verbundenen Koordinatensystems werden in einer Spaltenmatrix  $\vec{e}^{(i)}$  angeordnet:

$$\vec{e}^{(i)} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix}^{(i)}$$

Die Spaltenmatrizen  $\vec{e}^{(i)}$  werden ihrerseits zu einer  $(3n \times n)$ -Matrix  $\vec{e}$  zusammengefaßt, derart, daß für die  $(3 \times 1)$ -Untermatrizen  $\vec{e}_{ij}$  von  $\vec{e}$  gilt

$$\vec{e}_{ij} = \begin{cases} \vec{e}^{(i)} & \text{für } i = j \\ \mathbf{0} & \text{für } i \neq j \end{cases}. \quad (1.2.3-1)$$

Es ist zu beachten, daß die Elemente von  $\vec{e}^{(i)}$  bzw.  $\vec{e}$  vektorielle Größen sind und daß damit diese Matrizen den eingangs vereinbarten Rechenregeln unterliegen.

Zur Beschreibung der Orientierung des Körpers  $i$  im Inertialsystem  $x, y, z$  wird zweckmäßigerweise ein Bezugssystem mit den Koordinateneinheitsvektoren  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$  eingeführt, dessen Bewegungszustand im  $x, y, z$ -System als bekannt vorausgesetzt wird. Mit der Spaltenmatrix

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \\ \vec{x}_3 \end{bmatrix}$$

läßt sich dann die Orientierung des Körpers  $i$  durch die Transformationsmatrix  $\Theta^{(i)}$  beschreiben gemäß

$$\vec{e}^{(i)} = \Theta^{(i)} \vec{x}. \quad (1.2.3-2)$$

Eine häufig gebrauchte Beziehung lautet

$$\vec{e}^{(i)} \odot \vec{e}^{(j)\top} = \Theta^{(i)} \Theta^{(j)\top} \vec{e}^{(j)} \odot \vec{e}^{(j)\top} = \Theta^{(i)} \Theta^{(j)\top}. \quad (1.2.3-3)$$

<sup>6)</sup> Derartig aufgebaute Matrizen werden wir manchmal vereinfachend Diagonalmatrizen nennen.



#### 1.2.4. Beziehungen zwischen den neu eingeführten Matrizen. Sätze 1—6

**Satz 1:** Das Produkt  $\mathbf{T} \mathbf{S}$  ist eine  $(n - 1)$ -zeilige Einheitsmatrix.

**Beweis:** Das Element  $(\mathbf{T} \mathbf{S})_{ab}$  der Matrix  $\mathbf{T} \mathbf{S}$  ist

$$(\mathbf{T} \mathbf{S})_{ab} = \sum_{i=1}^n T_{ai} S_{ib}.$$

Die beiden Scheitel des Bogens  $u_b$  seien  $s_{i_1}$  und  $s_{i_2}$ , wobei  $u_b$  bei  $s_{i_1}$  beginnen möge, d. h.  $s_{i_2} < s_{i_1}$  (s. Abb. 11). Aus der Definition von  $\mathbf{S}$  folgt, daß

$$(\mathbf{T} \mathbf{S})_{ab} = T_{ai_1} - T_{ai_2}.$$

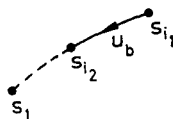


Abb. 11

Betrachten wir zunächst die Diagonalelemente mit  $a = b$ . Für sie sind  $T_{ai_1} = 1$  und  $T_{ai_2} = 0$ , also  $(\mathbf{T} \mathbf{S})_{aa} = 1$ .

Wenn  $a \neq b$ , dann ist entweder  $u_a$  auf dem direkten Zweig von  $s_{i_2}$  nach  $s_1$ , oder es ist nicht auf dem direkten Zweig von  $s_i$  nach  $s_1$ . In einem Fall ist  $T_{ai_1} = T_{ai_2} = 1$ , im anderen ist  $T_{ai_1} = T_{ai_2} = 0$ , stets also  $(\mathbf{T} \mathbf{S})_{ab} = 0$ . Ende des Beweises.

Das Produkt  $\mathbf{C} \mathbf{T}$  ist eine  $(3n \times n)$ -Matrix, aufteilbar als  $(n \times n)$ -Matrix mit  $(3 \times 1)$ -Untermatrizen  $(\mathbf{C} \mathbf{T})_{ij}$ .

$$(\mathbf{C} \mathbf{T})_{ij} = \sum_{a=1}^n C_{ia} T_{aj}.$$

Da  $T_{aj}$  gleich Null ist, wenn  $u_a$  nicht auf dem direkten Zweig von  $x_j$  nach  $x_1$  liegt, erstreckt sich die Summation nur über diesen Zweig. Man erkennt leicht, daß  $(\mathbf{C} \mathbf{T})_{ij}$  gleich ist der Komponentendarstellung:

des Nullvektors, wenn  $s_i$  nicht  $\leq s_j$  oder  $s_j = s_1$ ,

des Vektors vom Massenmittelpunkt des Körpers  $i$  zum Gelenkpunkt des Körpers  $i$  auf dem direkten Zweig zu Körper 1, wenn  $s_i = s_j \neq s_1$ ,

des Vektors vom Gelenkpunkt des Körpers  $i$  auf dem direkten Zweig zu Körper  $j$  zum Gelenkpunkt des Körpers  $i$  auf dem direkten Zweig zu Körper 1, wenn  $s_i < s_j$  und  $s_i \neq s_1$ ,

des Vektors vom Gelenkpunkt des Körpers 1 auf dem direkten Zweig zu Körper  $j$  zum Massenmittelpunkt des Körpers 1, wenn  $s_i = s_1 \neq s_j$ .  
(1.2.4-1)

$(\mathbf{C} \mathbf{T})_{ij}$  ist also die Komponentendarstellung eines Vektors auf dem Körper  $i$  gemessen in dessen körperfestem Koordinatensystem  $\mathbf{e}^{(i)}$  und damit eine gegebene Größe. Abb. 12 zeigt die durch  $(\mathbf{C} \mathbf{T})_{ij}$  dargestellten Vektoren bei festgehaltenem Wert  $j$  für alle Werte  $i = 1, \dots, n$ .

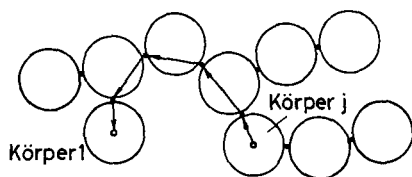
o  $\hat{=}$  Massenmittelpunkt

Abb. 12

Aus den eben gewonnenen Ergebnissen folgt unmittelbar

**Satz 2:**

$$\sum_{i=1}^n \vec{e}^{(i)T} (C T)_{ij} = \vec{R}^{(1)} - \vec{R}^{(j)}$$

$$T^T C^T \vec{e} \mathbf{1}_n = \begin{bmatrix} \vec{R}^{(1)} - \vec{R}^{(1)} \\ \vec{R}^{(1)} - \vec{R}^{(2)} \\ \vdots \\ \vec{R}^{(1)} - \vec{R}^{(n)} \end{bmatrix}$$

Darin ist  $\mathbf{1}_n$  eine  $n$ -zeilige Spaltenmatrix, deren sämtliche Elemente gleich Eins sind.

Die Erkenntnis weiterer grundlegender Zusammenhänge erfordert zunächst die Definition einiger neuer Parameter. Aus dem gegebenen System von Körpern stellen wir nach folgender Vorschrift ein neues her:

Betrachte einen beliebigen Körper  $i$  des Systems. Konzentriere in seinen Gelenkpunkten die Summe der Massen aller Körper, die mit ihm durch die betreffenden Gelenke unmittelbar oder mittelbar verbunden sind. Wenn man das mit jedem Körper des ursprünglichen Systems durchführt, erhält man  $n$  neue Körper, die wir die erweiterten Körper nennen. Jeder erweiterte Körper hat die Masse  $M$  und einen i. a. vom ursprünglichen abweichenden Massenmittelpunkt, den wir das Baryzentrum des Körpers nennen.

$\vec{B}_{ii}$  sei der Vektor vom Baryzentrum zum Massenmittelpunkt des Körpers  $i$ ,  $\vec{B}_{ik}$  für  $i \neq k$  der Vektor vom Baryzentrum des Körpers  $i$  zu dem Gelenkpunkt des Körpers  $i$  auf dem direkten Zweig zu Körper  $k$  (s. Abb. 13).  $B_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) sei die Spaltenmatrix der Komponenten von  $\vec{B}_{ij}$  im Achsensystem  $\vec{e}^{(i)}$ , also eine konstante, mit dem System gegebene Größe.

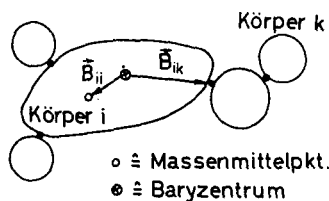
•  $\hat{=}$  Baryzentrum

Abb. 13

**Satz 3:**

$$\sum_{j=1}^n (C T)_{ij} m^{(j)} = M B_{i1}; \quad i = 1, \dots, n.$$

Satz 4:

$$(\mathbf{C} \mathbf{T} \boldsymbol{\mu})_{ik} = -\mathbf{B}_{ik}; \quad i, k = 1, \dots, n.$$

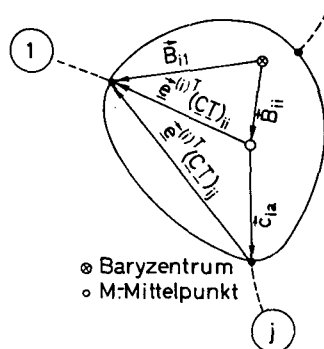


Abb. 14

Beweis zu Satz 3 (vgl. Abb. 14):

Aus der Definition von  $\mathbf{B}_{ii}$  folgt

$$M \mathbf{B}_{ii} = \sum_{j=1}^n [(\mathbf{C} \mathbf{T})_{ij} - (\mathbf{C} \mathbf{T})_{ii}] m^{(j)},$$

$$M \mathbf{B}_{ii} = \sum_{j=1}^n (\mathbf{C} \mathbf{T})_{ij} m^{(j)} - M (\mathbf{C} \mathbf{T})_{ii},$$

also

$$\sum_{j=1}^n (\mathbf{C} \mathbf{T})_{ij} m^{(j)} = M [(\mathbf{C} \mathbf{T})_{ii} + \mathbf{B}_{ii}] = M \mathbf{B}_{i1}.$$

Ende des Beweises.

Beweis zu Satz 4:

$$(\mathbf{C} \mathbf{T} \boldsymbol{\mu})_{ik} = (\mathbf{C} \mathbf{T})_{ik} - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^n (\mathbf{C} \mathbf{T})_{ij} m^{(j)} = (\mathbf{C} \mathbf{T})_{ik} - \mathbf{B}_{i1}.$$

Wenn man hier Gl. (1.2.4-1) einsetzt und beachtet, daß  $\mathbf{B}_{i1} = \mathbf{B}_{ik}$ , wenn  $s_i$  nicht  $\leq s_k$  ist, bestätigt sich Satz 4 sofort.

Satz 5:

$$\begin{bmatrix} \vec{R}^{(1)} \\ \vdots \\ \vec{R}^{(n)} \end{bmatrix} = \|\vec{R}^{(i)}\|_{i=1, \dots, n} = -\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{T}^T \mathbf{C}^T \vec{e} \mathbf{1}_n.$$

Beweis:

$$-\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{T}^T \mathbf{C}^T \vec{e} \mathbf{1}_n = -\mathbf{T}^T \mathbf{C}^T \vec{e} \mathbf{1}_n + \left\| \frac{1}{M} \sum_{j=1}^n m^{(j)} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}^T \vec{e} \mathbf{1}_n)_j \right\|$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| -\vec{R}^{(1)} + \vec{R}^{(i)} + \frac{1}{M} \sum_{j=1}^n m^{(j)} (\vec{R}^{(1)} - \vec{R}^{(j)}) \right\|_{i=1, \dots, n}, \\
&\quad (\text{Satz 2 zufolge}) \\
&= \left\| -\vec{R}^{(1)} + \vec{R}^{(i)} + \vec{R}^{(1)} \right\|_{i=1, \dots, n} \\
&= \left\| \vec{R}^{(i)} \right\|_{i=1, \dots, n}.
\end{aligned}$$

Ende des Beweises.

**Satz 6:**

$$\vec{R}^{(i)} = \sum_{k=1}^n \vec{B}_{ki}.$$

Beweis: Satz 5 sagt aus, daß

$$\left\| \vec{R}^{(i)} \right\|_{i=1, \dots, n} = -\boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{T}^\top \mathbf{C}^\top \vec{e}^1_n.$$

Satz 4 zufolge ist

$$(\boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{T}^\top \mathbf{C}^\top)_{ik} = -\mathbf{B}_{ki}^\top.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar die Aussage von Satz 6. Abb. 15 zeigt  $\vec{R}^{(i)}$  und alle Vektoren  $\vec{B}_{ki}$  ( $k = 1, \dots, n$ ).

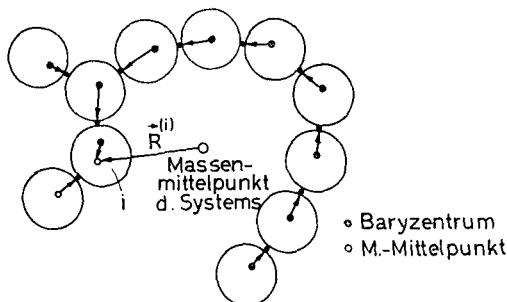


Abb. 15

### 1.2.5. Definitionen einiger wichtiger Größen

Größen, die im folgenden häufig auftreten, sollen hier zusammenfassend definiert werden.

1.  $\mathbf{R}^{(i)}$  ist die Spaltenmatrix der Komponenten von  $\vec{R}^{(i)}$  im Koordinatensystem  $\vec{e}^{(i)}$ .  $\mathbf{R}$  ist eine Spaltenmatrix mit  $3n$  Elementen, deren Untermatrizen die  $\mathbf{R}^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) sind.

In gleicher Weise baut sich die  $3n$ -zeilige Spaltenmatrix  $\dot{\mathbf{R}}$  aus den Spaltenmatrizen  $\dot{\mathbf{R}}^{(i)}$  auf, die die Komponentendarstellungen der Vektoren  $\dot{\vec{R}}^{(i)}$  sind.

2.  $\boldsymbol{\omega}^{(i)}$  bzw.  $\dot{\boldsymbol{\omega}}^{(i)}$  sind die Spaltenmatrizen der Komponenten von  $\vec{\omega}^{(i)}$  bzw.  $\dot{\vec{\omega}}^{(i)}$  im Koordinatensystem  $\vec{e}^{(i)}$ .  $\boldsymbol{\omega}$  und  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  sind  $3n$ -zeilige Spaltenmatrizen, die sich aus den  $\boldsymbol{\omega}^{(i)}$  bzw.  $\dot{\boldsymbol{\omega}}^{(i)}$  aufbauen, wie  $\mathbf{R}$  aus den  $\mathbf{R}^{(i)}$ .

3. Noch oft werden  $(3 \times 3)$ -Matrizen einer besonderen Bauart gebraucht. Die Vorschrift für ihre Konstruktion lautet folgendermaßen: Sei  $\mathbf{a}$  eine aus drei skalaren oder vektoriellen Elementen  $a_{1,2,3}$  bestehende Spaltenmatrix.

Dann ist unter  $\tilde{\mathbf{a}}$  die schiefsymmetrische Matrix

$$\tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

zu verstehen. Später auftauchende Beispiele sind

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}^{(i)} \quad \tilde{\mathbf{e}}^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & -\vec{e}_3 & \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 & 0 & -\vec{e}_1 \\ -\vec{e}_2 & \vec{e}_1 & 0 \end{bmatrix}^{(i)}.$$

Die Bedeutung dieser Matrizen liegt in folgender Eigenschaft. Sind  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  die Komponentendarstellungen zweier Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ , dann ist  $\tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b}$  die Komponentendarstellung des Vektorprodukts  $\vec{a} \times \vec{b}$ . Daraus folgen sofort die Rechenregeln

$$\tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b} = -\tilde{\mathbf{b}} \mathbf{a} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{a}} \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

4. Aus den Matrizen  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(i)}$  wird eine  $(3n \times 3n)$ -Matrix  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$  zusammengestellt, deren  $(3 \times 3)$ -Untermatrizen  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ij}$  lauten

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ij} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(i)} \delta_{ij}.$$

#### 1.2.6. Die Formulierung der kinetischen Energie mit Hilfe der in Kapitel (1.2.1) bis (1.2.5) eingeführten Größen

Kehren wir nun zu der Aufgabe zurück, den in Gl. (1.2-2) gewonnenen Ausdruck für die kinetische Energie umzuformen. Zunächst können wir die in Gl. (1.2-3) ausgedrückte Integralsumme weiter vereinfachen zu

$$-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{m^{(i)}} \dot{\varrho}^{(i)2} dm = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \mathbf{I} \tilde{\boldsymbol{\omega}}. \quad (1.2.6-)$$

Die angestrebte Elimination der Vektoren  $\dot{\vec{R}}^{(i)}$  wird durch Satz 5 ermöglicht. Wir können schreiben

$$\sum_{i=1}^n \dot{\vec{R}}^{(i)2} m^{(i)} = (\mathbf{m} \|\dot{\vec{R}}^{(i)}\|_{i=1, \dots, n})^T \odot \|\dot{\vec{R}}^{(i)}\|_{i=1, \dots, n}.$$

Satz 5 sagt aus, daß

$$\|\dot{\vec{R}}^{(i)}\|_{i=1, \dots, n} = -\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{T}^T \mathbf{C}^T \vec{\mathbf{e}} \mathbf{1}_n.$$

Mit Ausnahme der Matrix  $\vec{\mathbf{e}}$  sind darin alle Größen zeitlich konstante Systemparameter. Folglich ist

$$\|\dot{\vec{R}}^{(i)}\|_{i=1, \dots, n} = -\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{T}^T \mathbf{C}^T \vec{\mathbf{e}} \mathbf{1}_n.$$

Betrachten wir eine der Untermatrizen von  $\vec{e}$ ,

$$\vec{e}^{(i)} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix}^{(i)}$$

Die zeitliche Ableitung der drei Vektoren  $\vec{e}_{1,2,3}^{(i)}$  ist

$$\dot{\vec{e}}_{1,2,3}^{(i)} = \vec{\omega}^{(i)} \times \vec{e}_{1,2,3}^{(i)}.$$

Dem entspricht die Matrizenschreibweise  $\dot{\vec{e}}^{(i)} = -\vec{\omega}^{(i)} \vec{e}^{(i)}$ , und da  $\omega$  und  $\vec{e}$  nur auf der Hauptdiagonale besetzt sind<sup>7)</sup>, gilt auch

$$\dot{\vec{e}} = -\vec{\omega} \vec{e}. \quad (1.2.6-2)$$

Damit ist

$$\left\| \dot{\vec{R}}^{(i)} \right\|_{i=1, \dots, n} = \mu^T T^T C^T \vec{\omega} \vec{e} \mathbf{1}_n$$

und folglich

$$\begin{aligned} (m \left\| \dot{\vec{R}}^{(i)} \right\|_{i=1, \dots, n})^T \odot \left\| \dot{\vec{R}}^{(i)} \right\|_{i=1, \dots, n} &= \mathbf{1}_n^T \vec{e}^T \vec{\omega}^T C T \mu m \odot \mu^T T^T C^T \vec{\omega} \vec{e} \mathbf{1}_n \\ &= \mathbf{1}_n^T \vec{e}^T \odot \vec{\omega}^T (C T \mu m \mu^T T^T C^T) \vec{\omega} \vec{e} \mathbf{1}_n. \end{aligned} \quad (1.2.6-3)$$

In der Klammer<sup>8)</sup> steht eine symmetrische  $(3n \times 3n)$ -Matrix, deren Elemente konstante Systemparameter sind. Wir nennen sie  $\mathbf{J}$ .

Mit den Gln. (1.2.6-1) und (1.2.6-3) lautet nun Gl. (1.2-2)

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} [\mathbf{1}_n^T \vec{e}^T \odot \vec{\omega}^T \mathbf{J} \vec{\omega} \vec{e} \mathbf{1}_n + \omega^T \mathbf{I} \omega]. \quad (1.2.6-4)$$

Die physikalische Interpretation der Matrix  $\mathbf{J}$  gestattet eine weitere Vereinfachung dieses Ausdrucks. Es gilt

**Satz 7:** Die  $(3 \times 3)$ -Untermatrizen  $\mathbf{J}_{ij}$  von  $\mathbf{J}$  sind

$$\mathbf{J}_{ij} = \sum_{k=1}^n m^{(k)} \mathbf{B}_{ik} \mathbf{B}_{jk}^T = \begin{cases} \sum_{k=1}^n m^{(k)} \mathbf{B}_{ik} \mathbf{B}_{ik}^T & \text{für } i = j \\ -M \mathbf{B}_{ij} \mathbf{B}_{ji}^T & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

**Beweis:** Die erste Aussage

$$\mathbf{J}_{ij} = \sum_{k=1}^n m^{(k)} \mathbf{B}_{ik} \mathbf{B}_{jk}^T$$

<sup>7)</sup> Vgl. Fußnote 6 auf S. 212.

<sup>8)</sup> Das Verknüpfungszeichen  $\odot$  für die skalare Multiplikation kann an jede beliebige Stelle zwischen die beiden Matrizen  $\vec{e}^T$  und  $\vec{e}$  gesetzt werden, da nur deren Elemente Vektoren sind.

folgt sofort aus der Definition

$$\mathbf{J} = (\mathbf{C} \mathbf{T} \boldsymbol{\mu}) \mathbf{m} (\mathbf{C} \mathbf{T} \boldsymbol{\mu})^\top$$

und Satz 4.

Damit ist Satz 7 für den Fall  $i = j$  schon bewiesen. Für  $i \neq j$  teilen wir das System in zwei sich nicht überschneidende Bereiche mit folgenden Eigenschaften:

Bereich I enthält den Scheitel  $s_i$ , Bereich II den Scheitel  $s_j$ . Für alle Scheitel  $s_k$  aus Bereich I ist  $\vec{B}_{jk} = \vec{B}_{ji}$ , für alle Scheitel  $s_k$  aus Bereich II ist  $\vec{B}_{ik} = \vec{B}_{ij}$ .

Jeder Graph kann in dieser Weise aufgeteilt werden, i. a. gibt es sogar mehrere Möglichkeiten der Aufteilung, wie Abb. 16 zeigt.

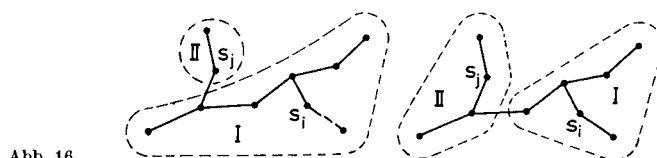


Abb. 16

Damit kann man schreiben

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{ij} &= \left( \sum_{k \in \text{I}} m^{(k)} \mathbf{B}_{ik} \right) \mathbf{B}_{ji}^\top + \mathbf{B}_{ij} \sum_{k \in \text{II}} m^{(k)} \mathbf{B}_{jk}^\top \\ &= \left( \sum_{k=1}^n m^{(k)} \mathbf{B}_{ik} - \sum_{k \in \text{II}} m^{(k)} \mathbf{B}_{ij} \right) \mathbf{B}_{ji}^\top + \\ &\quad + \mathbf{B}_{ij} \left( \sum_{k=1}^n m^{(k)} \mathbf{B}_{jk}^\top - \sum_{k \in \text{I}} m^{(k)} \mathbf{B}_{ji}^\top \right) \\ &= -M \mathbf{B}_{ij} \mathbf{B}_{ji}^\top, \end{aligned}$$

denn die beiden Summen über  $k = 1, \dots, n$  sind Null wegen der Definition des Baryzentrums. Ende des Beweises.

Betrachten wir wieder das erste Glied in Gl. (1.2.6–4).

Der Ausdruck  $\vec{e}^\top \odot \vec{\omega}^\top \mathbf{J} \vec{\omega} \vec{e} \mathbf{1}_n$  ist eine Spaltenmatrix mit  $n$  Elementen, die durch den Vorfaktor  $\mathbf{1}_n^\top$  aufsummiert werden. Für das Element mit dem Index  $i$  kann man schreiben

$$\begin{aligned} (\vec{e}^\top \odot \vec{\omega}^\top \mathbf{J} \vec{\omega} \vec{e} \mathbf{1}_n)_i &= \sum_{k=1}^n \vec{e}^{(i)\top} \odot \vec{\omega}^{(i)\top} \mathbf{J}_{ik} \vec{\omega}^{(k)} \vec{e}^{(k)} \\ &= \vec{e}^{(i)\top} \odot \vec{\omega}^{(i)\top} \mathbf{J}_{ii} \vec{\omega}^{(i)} \vec{e}^{(i)} - \\ &\quad - M \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \vec{e}^{(i)\top} \odot \vec{\omega}^{(i)\top} \mathbf{B}_{ik} \mathbf{B}_{ki}^\top \vec{\omega}^{(k)} \vec{e}^{(k)}. \end{aligned} \quad (1.2.6-5)$$

Das Glied mit  $J_{ii}$  wird weiter umgeformt

$$\begin{aligned}\vec{e}^{(i)\top} \odot \tilde{\omega}^{(i)\top} J_{ii} \tilde{\omega}^{(i)} \vec{e}^{(i)} &= -\vec{e}^{(i)\top} \odot \tilde{\omega}^{(i)} J_{ii} \tilde{\omega}^{(i)} \vec{e}^{(i)}; \\ &= -\omega^{(i)\top} \left( \tilde{e}^{(i)} \odot J_{ii} \tilde{e}^{(i)} \right) \omega^{(i)} \\ &= \omega^{(i)\top} \Phi^{(i)} \omega^{(i)}\end{aligned}$$

mit der symmetrischen Matrix

$$\Phi^{(i)} = \begin{bmatrix} J_{ii_{22}} + J_{ii_{33}} & -J_{ii_{21}} & -J_{ii_{31}} \\ -J_{ii_{12}} & J_{ii_{11}} + J_{ii_{33}} & -J_{ii_{32}} \\ -J_{ii_{13}} & -J_{ii_{23}} & J_{ii_{11}} + J_{ii_{22}} \end{bmatrix}. \quad (1.2.6-6)$$

Das zweite Paar Indizes bezeichnet die Stellung des Elements innerhalb der Matrix  $J_{ii}$ .

Ein einzelnes Element unter dem Summenzeichen in Gl. (1.2.6-5) ist

$$\begin{aligned}M \left( \vec{e}^{(i)\top} \tilde{\omega}^{(i)\top} B_{ik} \right) \odot \left( B_{ki}^\top \tilde{\omega}^{(k)} \vec{e}^{(k)} \right) &= \\ &= -M \left( B_{ik}^\top \tilde{\omega}^{(i)} \right) \left( \vec{e}^{(i)} \odot \vec{e}^{(k)\top} \right) \left( \tilde{\omega}^{(k)} B_{ki} \right) \\ &= -M \omega^{(i)\top} \tilde{B}_{ik} \Theta^{(i)} \Theta^{(k)\top} \tilde{B}_{ki} \omega^{(k)} \\ &= -\omega^{(i)\top} \Psi_{ik} \omega^{(k)}\end{aligned}$$

mit der Matrix

$$\Psi_{ik} = M \tilde{B}_{ik} \Theta^{(i)} \Theta^{(k)\top} \tilde{B}_{ki}. \quad (1.2.6-7)$$

(Die Klammern sind nur gesetzt, um anzudeuten, welche Teilprodukte beim Übergang zur jeweils nächsten Zeile getrennt umgeformt werden.)

Die Gln. (1.2.6-5), (1.2.6-6) und (1.2.6-7) erlauben es, Gl. (1.2.6-4) in die Form zu bringen

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \omega^\top (\Phi + \Psi + I) \omega. \quad (1.2.6-8)$$

Darin sind  $\Phi$  und  $\Psi$   $3 \times 3$ -zeilige, quadratische, symmetrische Matrizen mit den  $(3 \times 3)$ -Untermatrizen

$$\begin{aligned}\Phi_{ij} &= \Phi^{(i)} \delta_{ij}, \\ \Psi_{ij} &= \begin{cases} 0 & \text{für } i = j \\ M \tilde{B}_{ij} \Theta^{(i)} \Theta^{(k)\top} \tilde{B}_{ji} & \text{für } i \neq j. \end{cases} \quad (1.2.6-9)\end{aligned}$$

$\Phi$  und  $I$  schließlich können zu einer Matrix  $K = \Phi + I$  zusammengefaßt werden. Die Untermatrizen  $K^{(i)}$  entlang ihrer Hauptdiagonale sind als die Trägheitsmatrizen der erweiterten Körper zu deuten, bezogen auf körperfeste



Koordinatenachsen, die zu den Achsen  $\vec{e}_{1,2,3}^{(i)}$  parallel liegen, ihren Ursprung jedoch in den Baryzentren haben. Als endgültiges Resultat haben wir also

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T (\mathbf{K} + \boldsymbol{\Psi}) \boldsymbol{\omega} . \quad (1.2.6-10)$$

Wir vermerken am Rande, daß die Matrix  $\mathbf{K} + \boldsymbol{\Psi}$  positiv definitiv ist.

### 1.3. Die potentielle Energie des n-Körper-Systems im Newtonschen Gravitationsfeld

Aus Abb. 8 liest man ab, daß die potentielle Energie  $V$  des gesamten Systems sich berechnet zu

$$V = -\kappa \sum_{i=1}^n \int_{m^{(i)}} \frac{dm}{|\vec{r}_0 + \vec{R}^{(i)} + \vec{\varrho}^{(i)}|} , \quad (1.3-1)$$

$$V = -\kappa \sum_{i=1}^n \int_{m^{(i)}} \frac{dm}{r_0 \left[ 1 + \frac{2 \vec{r}_0 \cdot (\vec{R}^{(i)} + \vec{\varrho}^{(i)})}{r_0^2} + \frac{(\vec{R}^{(i)} + \vec{\varrho}^{(i)})^2}{r_0^2} \right]^{1/2}}$$

$\kappa$  ist das Produkt der universellen Gravitationskonstante mit der Masse der Erde. Vernachlässigt man alle Glieder höherer als zweiter Ordnung in  $R^{(i)}/r_0$  und  $\varrho^{(i)}/r_0$ , dann erhält man

$$V = -\kappa \sum_{i=1}^n \int_{m^{(i)}} \frac{1}{r_0} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[ \frac{2 \vec{r}_0 \cdot (\vec{R}^{(i)} + \vec{\varrho}^{(i)})}{r_0^2} + \frac{(\vec{R}^{(i)} + \vec{\varrho}^{(i)})^2}{r_0^2} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{8} \left[ \frac{2 \vec{r}_0 \cdot (\vec{R}^{(i)} + \vec{\varrho}^{(i)})}{r_0^2} \right]^2 + \dots \right\} dm .$$

Wir verfügen jetzt, daß der Einheitsvektor  $\vec{x}_3$  des in Kapitel (1.2.3) eingeführten Koordinatensystems  $\vec{x}_{1,2,3}$  stets in die Richtung von  $\vec{r}_0$  weist, d. h. in die Richtung der örtlichen Vertikale. Dann ist  $\vec{r}_0/r_0 = \vec{x}_3$  und damit (der Einfachheit halber wird nun wieder das Gleichheitszeichen verwendet)

$$V = -\frac{\kappa M}{r_0} + \frac{\kappa}{r_0^3} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [\vec{R}^{(i)2} m^{(i)} + \int_{m^{(i)}} \vec{\varrho}^{(i)2} dm] - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n [(\vec{x}_3 \cdot \vec{R}^{(i)})^2 m^{(i)} + \int_{m^{(i)}} (\vec{x}_3 \cdot \vec{\varrho}^{(i)})^2 dm] \right\} . \quad (1.3-2)$$

Im folgenden soll unter  $\Theta_k^{(i)}$  die  $k$ -te Spalte der Matrix  $\boldsymbol{\Theta}^{(i)}$ , d. h. die Spaltenmatrix

$$\begin{bmatrix} \Theta_{1k} \\ \Theta_{2k} \\ \Theta_{3k} \end{bmatrix}^{(i)}$$

verstanden werden.  $\Theta_k$  sei ferner eine  $3 \times n$ -zeilige Spaltenmatrix, in der alle  $\Theta_k^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) untereinanderstehen. Mit dieser Bezeichnung ist

$$(\vec{x}_3 \cdot \vec{\varrho}^{(i)})^2 = \Theta_3^{(i)\top} \rho^{(i)} \rho^{(i)\top} \Theta_3^{(i)}$$

und folglich

$$\int_{m^{(i)}} (\vec{x}_3 \cdot \vec{\varrho}^{(i)})^2 dm = \Theta_3^{(i)\top} \left[ \int_{m^{(i)}} (\rho^{(i)} \rho^{(i)\top} - \rho^{(i)\top} \rho^{(i)} E_3) dm \right] \Theta_3^{(i)} + \Theta_3^{(i)\top} \left[ \int_{m^{(i)}} \rho^{(i)\top} \rho^{(i)} dm \right] \Theta_3^{(i)},$$

$$\int_{m^{(i)}} (\vec{x}_3 \cdot \vec{\varrho}^{(i)})^2 dm = -\Theta_3^{(i)\top} I^{(i)} \Theta_3^{(i)} + \frac{1}{2} \text{Sp } I^{(i)}$$

und

$$\sum_{i=1}^n \int_{m^{(i)}} (\vec{x}_3 \cdot \vec{\varrho}^{(i)})^2 dm = -\Theta_3^\top I \Theta_3 + \frac{1}{2} \text{Sp } I.$$

Damit kann die Gl. (1.3-2) ersetzt werden durch

$$V = -\frac{\kappa M}{r_0} + \frac{\kappa}{2 r_0^3} \left[ 3 \Theta_3^\top I \Theta_3 - \text{Sp } I - 3 \sum_{i=1}^n (\vec{x}_3 \cdot \vec{R}^{(i)})^2 m^{(i)} + \sum_{i=1}^n \vec{R}^{(i)2} m^{(i)} \right] \quad (1.3-3)$$

Anknüpfend an Satz 5 kann man schreiben

$$\sum_{i=1}^n (\vec{x}_3 \cdot \vec{R}^{(i)})^2 m^{(i)} = (\mathbf{m} \parallel \vec{x}_3 \cdot \vec{R}^{(i)} \parallel_{i=1, \dots, n})^\top \cdot \parallel \vec{x}_3 \cdot \vec{R}^{(i)} \parallel_{i=1, \dots, n} \quad (1.3-4)$$

mit

$$\parallel \vec{x}_3 \cdot \vec{R}^{(i)} \parallel_{i=1, \dots, n} = -\boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{C}^\top \mathbf{T}^\top (\vec{x}_3 \odot \vec{e}) \mathbf{1}_n.$$

Dabei wird unter  $\vec{x}_3 \odot \vec{e}$  die Matrix verstanden

$$\vec{x}_3 \odot \vec{e} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}_3 \cdot \vec{e}_1^{(1)} \\ \vec{x}_3 \cdot \vec{e}_2^{(1)} \\ \vec{x}_3 \cdot \vec{e}_3^{(1)} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \vec{x}_3 \cdot \vec{e}_1^{(n)} \\ \vec{x}_3 \cdot \vec{e}_2^{(n)} \\ \vec{x}_3 \cdot \vec{e}_3^{(n)} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_3^{(1)} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \Theta_3^{(n)} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Mit  $\mathbf{1}_n$  multipliziert ergibt das  $\Theta_3$ . Folglich ist

$$\sum_{i=1}^n (\vec{x}_3 \cdot \vec{R}^{(i)})^2 m^{(i)} = \Theta_3^\top \mathbf{T} \mathbf{C} \boldsymbol{\mu} \mathbf{m} \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{C}^\top \mathbf{T}^\top \Theta_3 = \Theta_3^\top \mathbf{J} \Theta_3. \quad (1.3-5)$$

Für die letzte Summe in Gl. (1.3-3) erhält man in ähnlicher Weise

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \vec{R}^{(i)2} m^{(i)} &= (\mathbf{m} \parallel \vec{R}^{(i)} \parallel_{i=1, \dots, n})^\top \odot \parallel \vec{R}^{(i)} \parallel_{i=1, \dots, n} \\ &= \mathbf{1}_n^\top \vec{\mathbf{e}}^\top \odot \mathbf{J} \vec{\mathbf{e}} \mathbf{1}_n \\ \sum_{i=1}^n \vec{R}^{(i)2} m^{(i)} &= \sum_{i,k=1}^n \vec{\mathbf{e}}^{(i)\top} \odot \mathbf{J}_{ik} \vec{\mathbf{e}}^{(k)} \\ &= \vec{\mathbf{e}}^{(i)\top} \odot \mathbf{J}_{ii} \vec{\mathbf{e}}^{(i)} + \sum_{\substack{i,k=1 \\ k \neq i}}^n \vec{\mathbf{e}}^{(i)\top} \odot \mathbf{J}_{ik} \vec{\mathbf{e}}^{(k)} \\ &= \sum_{k=1}^n \vec{\mathbf{e}}^{(i)\top} \odot m^{(k)} \mathbf{B}_{ik} \mathbf{B}_{ik}^\top \vec{\mathbf{e}}^{(i)} - M \sum_{\substack{i,k=1 \\ k \neq i}}^n \vec{\mathbf{e}}^{(i)\top} \odot \mathbf{B}_{ik} \mathbf{B}_{ki}^\top \vec{\mathbf{e}}^{(k)} \\ &= \sum_{k=1}^n m^{(k)} \mathbf{B}_{ik}^\top \mathbf{B}_{ik} - M \sum_{\substack{i,k=1 \\ k \neq i}}^n \mathbf{B}_{ik}^\top \Theta^{(i)} \Theta^{(k)\top} \mathbf{B}_{ki}. \end{aligned} \quad (1.3-6)$$

Mit den Gln. (1.3-5) und (1.3-6) ergibt sich nun aus Gl. (1.3-3)

$$\begin{aligned} V = -\frac{\kappa M}{r_0} + \frac{\kappa}{2 r_0^3} \left[ 3 \Theta_3^\top (\mathbf{I} - \mathbf{J}) \Theta_3 + \text{Sp } \mathbf{I} + \sum_{k=1}^n m^{(k)} \mathbf{B}_{ik}^\top \mathbf{B}_{ik} - \right. \\ \left. - M \sum_{\substack{i,k=1 \\ k \neq i}}^n \mathbf{B}_{ik}^\top \Theta^{(i)} \Theta^{(k)\top} \mathbf{B}_{ki} \right] \end{aligned} \quad (1.3-7)$$

Sei  $\mathbf{Z}$  eine symmetrische  $(n \times n)$ -Matrix mit den Elementen

$$Z_{ik} = \begin{cases} 0 & k = i \\ M \mathbf{B}_{ik}^\top (3 \Theta_3^{(i)} \Theta_3^{(k)\top} - \Theta^{(i)} \Theta^{(k)\top}) \mathbf{B}_{ki} & \text{für } k \neq i \end{cases} \quad (1.3-8)$$

Dann erhält Gl. (1.3-7) die Form

$$V = -\frac{\kappa M}{r_0} + \frac{\kappa}{2 r_0^3} [3 \Theta_3^\top \mathbf{K} \Theta_3 + \text{Sp } \mathbf{K} + \mathbf{1}_n^\top \mathbf{Z} \mathbf{1}_n].$$

$\mathbf{K}$  ist die im Zusammenhang mit Gl. (1.2.6-10) eingeführte Trägheitsmatrix.

$\text{Sp } \mathbf{K}$  und in dem hier betrachteten Fall auch  $\frac{\kappa M}{r_0}$  sind konstante Größen<sup>9)</sup>

<sup>9)</sup> Vgl. die Bemerkungen über das erste Glied in Gl. (1.2-1) auf S. 209.

Die Wahl eines geeigneten Nullniveaus ergibt für die potentielle Energie dann das Ergebnis

$$V = \frac{\gamma}{2 r_0^3} [ 3 \boldsymbol{\Theta}_3^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Theta}_3 + \mathbf{1}_n^T \mathbf{Z} \mathbf{1}_n ] . \quad (1.3-9)$$

#### 1.4. Die aus der kinetischen Energie abgeleiteten Anteile der Bewegungsgleichungen

Mit den in den Gln. (1.2.6–10) und (1.3–9) gewonnenen Ausdrücken für die kinetische und potentielle Energie des Systems werden nun die Lagrangeschen Gleichungen formuliert. Zunächst wird der Ausdruck für die kinetische Energie den in Kapitel (1.1) für den einzelnen starren Körper beschriebenen Rechenoperationen unterzogen. Als Resultat ergeben sich alle Glieder der Bewegungsgleichungen, die Winkelgeschwindigkeiten und Beschleunigungen enthalten.

Das Vorhandensein von  $n$  Körpern erfordert die Definition von je  $n$  Beziehungen der Form

$$\boldsymbol{\omega}^{(i)} = \mathbf{G}^{(i)} \dot{\mathbf{q}}^{(i)} \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{q}}^{(i)} = \mathbf{G}^{(i)-1} \boldsymbol{\omega}^{(i)} \quad (1.4-1)$$

zwischen den Quasigeschwindigkeiten  $\omega_{1,2,3}^{(i)}$  und den generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{\psi}^{(i)}$ ,  $\dot{\vartheta}^{(i)}$ ,  $\dot{\varphi}^{(i)}$  der einzelnen Körper. Die  $n$  Matrizen  $\mathbf{G}^{(i)}$  bzw.  $\mathbf{G}^{(i)-1}$  sind nach den Gln. (1.1–3) und (1.1–4) aus  $\psi^{(i)}$ ,  $\vartheta^{(i)}$ ,  $\varphi^{(i)}$  zu berechnen. Alle diese Beziehungen lassen sich zusammenfassen in den Gleichungen

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{G} \dot{\mathbf{q}} \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}^{-1} \boldsymbol{\omega}$$

mit den  $(3n \times 3n)$ -Matrizen  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{G}^{-1}$ , deren Untermatrizen lauten

$$\mathbf{G}_{ij} = \mathbf{G}^{(i)} \delta_{ij}, \quad (\mathbf{G}^{-1})_{ij} = \mathbf{G}^{(i)-1} \delta_{ij}.$$

Die kinetische Energie ist damit

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{G}^T \mathbf{K} \mathbf{G} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{G}^T \boldsymbol{\Psi} \mathbf{G} \dot{\mathbf{q}}. \quad (1.4-2)$$

Betrachten wir zunächst den Ausdruck mit  $\mathbf{K}$ . Er heiße  $T_1$ . Wie in Kapitel (1.1) ergeben sich

$$\left\| \frac{d}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}_k} \right\|_{k=1, \dots, 3n} = \mathbf{G}^T \mathbf{K} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{G}}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\omega} \quad (1.4-3)$$

und

$$\left\| \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{q}_k} \right\|_{k=1, \dots, 3n} = \left\| \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{G}^{-1^T} \frac{\partial \mathbf{G}^T}{\partial \mathbf{q}_k} \mathbf{K} \boldsymbol{\omega} \right\|_{k=1, \dots, 3n}. \quad (1.4-4)$$

Diese Spaltenmatrizen haben jetzt je  $3n$  Elemente. Der zweite Ausdruck in Gl. (1.4-2) — er heiße  $T_2$  — enthält  $\boldsymbol{\Psi}$ , eine Matrix, die selbst von den generalisierten Koordinaten abhängt (vgl. Gl. (1.2.6–7)). Daher ist

$$\left\| \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_k} \right\|_{k=1, \dots, 3n} = \mathbf{G}^\top \mathbf{\Psi} \boldsymbol{\omega},$$

$$\left\| \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_k} \right) \right\|_{k=1, \dots, 3n} = \mathbf{G}^\top \mathbf{\Psi} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{G}}^\top \mathbf{\Psi} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{G}^\top \dot{\mathbf{\Psi}} \boldsymbol{\omega} \quad (1.4-5)$$

und

$$\left\| \frac{\partial T_2}{\partial q_k} \right\|_{k=1, \dots, 3n} = \left\| \boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{G}^{-1\top} \frac{\partial \mathbf{G}^\top}{\partial q_k} \mathbf{\Psi} \boldsymbol{\omega} \right\|_{k=1, \dots, 3n} + \frac{1}{2} \left\| \boldsymbol{\omega}^\top \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial q_k} \boldsymbol{\omega} \right\|_{k=1, \dots, 3n} \quad (1.4-6)$$

Die Gln. (1.4-3), (1.4-4), (1.4-5) und (1.4-6) ergeben zusammen für

$$\left\| \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right\|_{k=1, \dots, 3n}$$

den Ausdruck

$$\begin{aligned} & \mathbf{G}^\top \mathbf{K} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{G}}^\top \mathbf{K} \boldsymbol{\omega} - \left\| \boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{G}^{-1\top} \frac{\partial \mathbf{G}^\top}{\partial q_k} \mathbf{K} \boldsymbol{\omega} \right\|_{k=1, \dots, 3n} + \\ & + \mathbf{G}^\top \mathbf{\Psi} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{G}}^\top \mathbf{\Psi} \boldsymbol{\omega} - \left\| \boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{G}^{-1\top} \frac{\partial \mathbf{G}^\top}{\partial q_k} \mathbf{\Psi} \boldsymbol{\omega} \right\|_{k=1, \dots, 3n} + \\ & + \mathbf{G}^\top \mathbf{\Psi} \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \left\| \boldsymbol{\omega}^\top \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial q_k} \boldsymbol{\omega} \right\|_{k=1, \dots, 3n} \end{aligned}$$

und nach Multiplikation von links mit  $\mathbf{G}^{-1\top}$

$$\begin{aligned} & (\mathbf{K} + \mathbf{\Psi}) \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{G}^{-1\top} \dot{\mathbf{G}}^\top (\mathbf{K} + \mathbf{\Psi}) \boldsymbol{\omega} - \mathbf{G}^{-1\top} \left\| \boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{G}^{-1\top} \frac{\partial \mathbf{G}^\top}{\partial q_k} (\mathbf{K} + \mathbf{\Psi}) \boldsymbol{\omega} \right\|_{k=1, \dots, 3n} \\ & + \mathbf{\Psi} \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \mathbf{G}^{-1\top} \left\| \boldsymbol{\omega}^\top \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial q_k} \boldsymbol{\omega} \right\|_{k=1, \dots, 3n}. \end{aligned} \quad (1.4-7)$$

Das erste Glied dieser Summe soll nicht weiter umgeformt werden. Der  $i$ -te Satz dreier Elemente der Spaltenmatrix ist

$$[(\mathbf{K} + \mathbf{\Psi}) \dot{\boldsymbol{\omega}}]^{(i)} = \mathbf{K}^{(i)} \dot{\boldsymbol{\omega}}^{(i)} + \sum_{j=1}^n \mathbf{\Psi}_{ij} \dot{\boldsymbol{\omega}}^{(j)}. \quad (1.4-8)$$

Betrachten wir die nächsten beiden Glieder. Wegen der diagonalen Anordnung von  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{G}^{-1}$  und  $\dot{\mathbf{G}}$  ist das Ergebnis analog zu dem für den einzelnen Körper

$$\begin{aligned} & \mathbf{G}^{-1\top} \dot{\mathbf{G}}^\top (\mathbf{K} + \mathbf{\Psi}) \boldsymbol{\omega} - \mathbf{G}^{-1\top} \left\| \boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{G}^{-1\top} \frac{\partial \mathbf{G}^\top}{\partial q_k} (\mathbf{K} + \mathbf{\Psi}) \boldsymbol{\omega} \right\|_{k=1, \dots, 3n} = \\ & = \tilde{\boldsymbol{\omega}} (\mathbf{K} + \mathbf{\Psi}) \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (1.4-9)$$

Daran ändert auch die Tatsache nichts, daß  $\mathbf{K} + \mathbf{\Psi}$  eine vollbesetzte,  $\mathbf{K}$  dagegen eine Diagonalmatrix ist. Der  $i$ -te Satz dreier Elemente dieser Spaltenmatrix ist

$$[\tilde{\omega}(\mathbf{K} + \mathbf{\Psi})\omega]_i = \tilde{\omega}^{(i)} \mathbf{K}^{(i)} \omega^{(i)} + \sum_{j=1}^n \tilde{\omega}^{(i)} \mathbf{\Psi}_{ij} \omega^{(j)}. \quad (1.4-10)$$

Wenden wir uns nun dem Glied  $\mathbf{\Psi}\omega$  zu. Die Untermatrizen von  $\mathbf{\Psi}$  lauten (vgl. Gl. (1.2.6–9))

$$\mathbf{\Psi}_{ii} = \mathbf{0}$$

und

$$\mathbf{\Psi}_{ij} = M \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \mathbf{\Theta}^{(i)} \mathbf{\Theta}^{(j)\top} \tilde{\mathbf{B}}_{ji} \quad \text{für } i \neq j$$

oder wegen Gl. (1.2.3–3)

$$\mathbf{\Psi}_{ij} = M \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \vec{e}^{(i)} \odot \vec{e}^{(j)\top} \tilde{\mathbf{B}}_{ji}.$$

Mit Gl. (1.2.6–2) ist ferner

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{e}^{(i)} \odot \vec{e}^{(j)\top}) &= \dot{\vec{e}}^{(i)} \odot \vec{e}^{(j)\top} + \vec{e}^{(i)} \odot \dot{\vec{e}}^{(j)\top} \\ &= -\tilde{\omega}^{(i)} \vec{e}^{(i)} \odot \vec{e}^{(j)\top} + \vec{e}^{(i)} \odot \vec{e}^{(j)\top} \tilde{\omega}^{(j)} \\ &= -\tilde{\omega}^{(i)} \mathbf{\Theta}^{(i)} \mathbf{\Theta}^{(j)\top} + \mathbf{\Theta}^{(i)} \mathbf{\Theta}^{(j)\top} \tilde{\omega}^{(j)}. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\mathbf{\Psi}_{ij} = -M \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \tilde{\omega}^{(i)} \mathbf{\Theta}^{(i)} \mathbf{\Theta}^{(j)\top} \tilde{\mathbf{B}}_{ji} + M \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \mathbf{\Theta}^{(i)} \mathbf{\Theta}^{(j)\top} \tilde{\omega}^{(j)} \tilde{\mathbf{B}}_{ji}.$$

Damit schließlich ergibt sich der  $i$ -te Satz dreier Elemente der Spaltenmatrix  $\mathbf{\Psi}\omega$  zu

$$\begin{aligned} (\mathbf{\Psi}\omega)_i &= -M \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \tilde{\omega}^{(i)} \mathbf{\Theta}^{(i)} \mathbf{\Theta}^{(j)\top} \tilde{\mathbf{B}}_{ji} \omega^{(j)} - \\ &\quad - M \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \mathbf{\Theta}^{(i)} \mathbf{\Theta}^{(j)\top} \tilde{\omega}^{(j)} \tilde{\omega}^{(j)} \tilde{\mathbf{B}}_{ji}. \end{aligned} \quad (1.4-11)$$

Als letztes Glied der Gl. (1.4–7) betrachten wir den Ausdruck

$$\frac{1}{2} \mathbf{G}^{-1\top} \left\| \omega^\top \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial q_k} \omega \right\|_{k=1, \dots, 3n}.$$

Die in  $\mathbf{\Psi}$  enthaltenen Koordinatentransformationsmatrizen  $\mathbf{\Theta}^{(i)}$  lauten als Funktionen der Eulerschen Winkel<sup>10)</sup> (s. Abb. 7)

<sup>10)</sup> Siehe z. B. Lur'e [26].

$$\Theta^{(i)} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \vartheta \sin \varphi & \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \vartheta \sin \varphi & \sin \vartheta \sin \varphi \\ -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \vartheta \cos \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \psi \sin \vartheta & -\cos \psi \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}^{(i)} \quad (1.4-12)$$

Ihre Ableitungen sind

$$\frac{\partial \Theta^{(i)}}{\partial \psi} = \begin{bmatrix} -\sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \cos \vartheta \sin \varphi & \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \vartheta \sin \varphi & 0 \\ \sin \psi \sin \varphi - \cos \psi \cos \vartheta \cos \varphi & -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \vartheta \cos \varphi & 0 \\ \cos \psi \sin \vartheta & \sin \psi \sin \vartheta & 0 \end{bmatrix}^{(i)}$$

$$\frac{\partial \Theta^{(i)}}{\partial \vartheta} = \begin{bmatrix} \sin \psi \sin \vartheta \sin \varphi & -\cos \psi \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi \\ \sin \psi \sin \vartheta \cos \varphi & -\cos \psi \sin \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \cos \varphi \\ \sin \psi \cos \vartheta & -\cos \psi \cos \vartheta & -\sin \vartheta \end{bmatrix}^{(i)}$$

$$\frac{\partial \Theta^{(i)}}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \vartheta \cos \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \cos \varphi \\ -\cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \cos \vartheta \sin \varphi & -\sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \cos \vartheta \sin \varphi & -\sin \vartheta \sin \varphi \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(i)} \quad (1.4-13)$$

Eine beliebige generalisierte Koordinate, z. B.  $\varphi^{(i)}$ , erscheint nur in den Unter-matrizen  $\Psi_{ij}$  und  $\Psi_{ji}$  ( $j = 1, \dots, n; j \neq i$ ).  $\frac{\partial \Psi}{\partial q_k}$  hat daher eine Besetzung wie in Abb. 17 (für eine bestimmte Koordinate als Beispiel) skizziert ist. Aus der Symmetrie von  $\Psi$  folgt dann, daß

$$\frac{1}{2} \left\| \boldsymbol{\omega}^\top \frac{\partial \Psi}{\partial q_k^{(i)}} \boldsymbol{\omega} \right\|_{k=1, \dots, 3} = \left\| \boldsymbol{\omega}^{(i)\top} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\partial \Psi_{ij}}{\partial q_k^{(i)}} \boldsymbol{\omega}^{(j)} \right\|_{k=1, \dots, 3}.$$

Dabei wird unter  $q_k^{(i)}$  die  $k$ -te Koordinate ( $k = 1, 2, 3$ ) des  $i$ -ten Körpers verstanden (z. B. ist  $q_3^{(2)} = \varphi^{(2)}$ ).

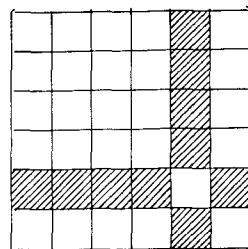


Abb. 17

Es ist

$$\frac{\partial \Psi_{ij}}{\partial q_k^{(i)}} = M \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \frac{\partial \Theta^{(i)}}{\partial q_k^{(i)}} \Theta^{(j)\top} \tilde{\mathbf{B}}_{ji},$$

so daß man schließlich für den  $i$ -ten Satz dreier Elemente der Spaltenmatrix

$$\frac{1}{2} \mathbf{G}^{-1\top} \left\| \boldsymbol{\omega}^\top \frac{\partial \Psi}{\partial q_k} \boldsymbol{\omega} \right\|_{k=1, \dots, 3n}$$

den Ausdruck erhält

$$M \mathbf{G}^{(i)-1\top} \left\| \boldsymbol{\omega}^{(i)\top} \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \frac{\partial \Theta^{(i)}}{\partial q_k^{(i)}} \Theta^{(j)\top} \tilde{\mathbf{B}}_{ji} \boldsymbol{\omega}^{(j)} \right\|_{k=1, \dots, 3},$$

dessen einzelne Elemente (Index  $\alpha = 1, 2, 3$ ) sich berechnen zu

$$\begin{aligned} & \left( M \mathbf{G}^{(i)-1\top} \left\| \boldsymbol{\omega}^{(i)\top} \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \frac{\partial \Theta^{(i)}}{\partial q_k^{(i)}} \Theta^{(j)\top} \tilde{\mathbf{B}}_{ji} \boldsymbol{\omega}^{(j)} \right\| \right)_\alpha = \\ &= M \sum_{k=1}^3 G_{\alpha k}^{(i)-1\top} \left( \boldsymbol{\omega}^{(i)\top} \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \frac{\partial \Theta^{(i)}}{\partial q_k^{(i)}} \Theta^{(j)\top} \tilde{\mathbf{B}}_{ji} \boldsymbol{\omega}^{(j)} \right) \\ &= M \sum_{k, l, m, n=1}^3 G_{\alpha k}^{(i)-1\top} \omega_l^{(i)} \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{\mathbf{B}}_{ij i m} \frac{\partial \Theta_{m n}^{(i)}}{\partial q_k^{(i)}} (\Theta^{(j)\top} \tilde{\mathbf{B}}_{ji} \boldsymbol{\omega}^{(j)})_n \\ &= M \sum_{k, l, m, n=1}^3 \omega_l^{(i)} \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{\mathbf{B}}_{ij i m} G_{k \alpha}^{(i)-1} \frac{\partial \Theta_{m n}^{(i)}}{\partial q_k^{(i)}} (\Theta^{(j)\top} \tilde{\mathbf{B}}_{ji} \boldsymbol{\omega}^{(j)})_n \\ &= M \sum_{k, l, m, n=1}^3 \omega_l^{(i)} \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{\mathbf{B}}_{ij i m} D_{m n}^{\alpha i} (\Theta^{(j)\top} \tilde{\mathbf{B}}_{ji} \boldsymbol{\omega}^{(j)})_n \\ &= M \boldsymbol{\omega}^{(i)\top} \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{\mathbf{B}}_{ij} D^{\alpha i} \Theta^{(j)\top} \tilde{\mathbf{B}}_{ji} \boldsymbol{\omega}^{(j)}. \end{aligned} \quad (1.4-14)$$

$D^{\alpha i}$  ist eine  $(3 \times 3)$ -Matrix, deren vierfach indizierte Elemente zu berechnen sind aus

$$D_{m n}^{\alpha i} = \sum_{k=1}^3 G_{k \alpha}^{(i)-1} \frac{\partial \Theta_{m n}^{(i)}}{\partial q_k^{(i)}}.$$

Mit den Gln. (1.1-4) und (1.4-13) erhält man die Matrizen



$$\begin{aligned}
D^{1i} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sin \psi \sin \vartheta & -\cos \psi \sin \vartheta & \cos \vartheta \\ \cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \vartheta \cos \varphi & \sin \psi \sin \vartheta - \cos \psi \cos \vartheta \cos \varphi & -\sin \vartheta \cos \varphi \end{bmatrix}^{(i)} \\
D^{2i} &= \begin{bmatrix} -\sin \psi \sin \vartheta & \cos \psi \sin \vartheta & -\cos \vartheta \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \vartheta \sin \varphi & \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \vartheta \sin \varphi & \sin \vartheta \sin \varphi \end{bmatrix}^{(i)} \\
D^{3i} &= \begin{bmatrix} -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \vartheta \cos \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \cos \varphi \\ -\cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \cos \vartheta \sin \varphi & -\sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \cos \vartheta \sin \varphi & -\sin \vartheta \sin \varphi \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(i)}
\end{aligned} \quad (1.4-15)$$

In den Zeilen von  $D^{1i}$ ,  $D^{2i}$ ,  $D^{3i}$  erkennt man die Zeilen von  $\Theta^{(i)}$  wieder (s. Gl. (1.4-12)). Der  $i$ -te Satz dreier Elemente der Spaltenmatrix

$$\frac{1}{2} G^{-1\top} \left\| \omega^\top \frac{\partial \Psi}{\partial q_k} \omega \right\|_{k=1, \dots, 3n}$$

läßt sich nun in der Form schreiben

$$\left( \frac{1}{2} G^{-1\top} \left\| \omega^\top \frac{\partial \Psi}{\partial q_k} \omega \right\|_{k=1, \dots, 3n} \right)_i = M \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \begin{bmatrix} [\omega^{(i)\top} \tilde{B}_{ij} D^{1i}] \\ [\omega^{(i)\top} \tilde{B}_{ij} D^{2i}] \\ [\omega^{(i)\top} \tilde{B}_{ij} D^{3i}] \end{bmatrix} \Theta^{(j)\top} \tilde{B}_{ji} \omega^{(j)}. \quad (1.4-16)$$

Man überzeugt sich leicht, daß die  $D^{1i}$ ,  $D^{2i}$ ,  $D^{3i}$  enthaltende  $(3 \times 3)$ -Matrix identisch ist mit der Matrix

$$[B_{ij} \omega^{(i)\top} - (B_{ij} \omega^{(i)\top})^\top] \Theta^{(i)}.$$

Damit lautet Gl. (1.4-16) schließlich

$$\begin{aligned}
&\left( \frac{1}{2} G^{-1\top} \left\| \omega^\top \frac{\partial \Psi}{\partial q_k} \omega \right\|_{k=1, \dots, 3n} \right)_i = \\
&= M \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n [B_{ij} \omega^{(i)\top} - (B_{ij} \omega^{(i)\top})^\top] \Theta^{(i)} \Theta^{(j)\top} \tilde{B}_{ji} \omega^{(j)}. \quad (1.4-17)
\end{aligned}$$

Nun sind die Voraussetzungen geschaffen, Gl. (1.4-7) neu zu formulieren. Mit den Gln. (1.4-8), (1.4-10), (1.4-11) und (1.4-17) ergibt sich für den  $i$ -ten Satz dreier Elemente des Ausdrucks (1.4-7)

$$K^{(i)} \dot{\omega}^{(i)} + \sum_{j=1}^n \Psi_{ij} \dot{\omega}^{(j)} + \tilde{\omega}^{(i)} K^{(i)} \omega^{(i)} + \sum_{j=1}^n \tilde{\omega}^{(i)} \Psi_{ij} \omega^{(j)} -$$

$$\begin{aligned}
& - M \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(i)} \boldsymbol{\Theta}^{(i)} \boldsymbol{\Theta}^{(j)\top} \tilde{\mathbf{B}}_{ji} \boldsymbol{\omega}^{(j)} - M \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \boldsymbol{\Theta}^{(i)} \boldsymbol{\Theta}^{(j)\top} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(j)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(j)} \mathbf{B}_{ji} - \\
& - M \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \left[ \mathbf{B}_{ij} \boldsymbol{\omega}^{(i)\top} - (\mathbf{B}_{ij} \boldsymbol{\omega}^{(i)})^\top \right] \boldsymbol{\Theta}^{(i)} \boldsymbol{\Theta}^{(j)\top} \tilde{\mathbf{B}}_{ji} \boldsymbol{\omega}^{(j)}. \quad (1.4-18)
\end{aligned}$$

Darin ist

$$\sum_{j=1}^n \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(i)} \boldsymbol{\Psi}_{ij} \boldsymbol{\omega}^{(j)} = M \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(i)} \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \boldsymbol{\Theta}^{(i)} \boldsymbol{\Theta}^{(j)\top} \tilde{\mathbf{B}}_{ji} \boldsymbol{\omega}^{(j)}.$$

Mit dem vierten Glied von Gl. (1.4-18) vereinigt ergibt das die Summe

$$M \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \left[ \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(i)} \tilde{\mathbf{B}}_{ij} - \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(i)} \right] \boldsymbol{\Theta}^{(i)} \boldsymbol{\Theta}^{(j)\top} \tilde{\mathbf{B}}_{ji} \boldsymbol{\omega}^{(j)}.$$

Hierin ist

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(i)} \tilde{\mathbf{B}}_{ij} = \mathbf{B}_{ij} \boldsymbol{\omega}^{(i)\top} - \mathbf{B}_{ij}^\top \boldsymbol{\omega}^{(i)} \mathbf{E}_3 \quad (1.4-19)$$

mit der dreizeiligen Einheitsmatrix  $\mathbf{E}_3$ . Diese Beziehung wird später noch mehrfach gebraucht.

Infolgedessen ist die zuletzt gebildete Summe gleich

$$M \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \left[ \mathbf{B}_{ij} \boldsymbol{\omega}^{(i)\top} - (\mathbf{B}_{ij} \boldsymbol{\omega}^{(i)})^\top \right] \boldsymbol{\Theta}^{(i)} \boldsymbol{\Theta}^{(j)\top} \tilde{\mathbf{B}}_{ji} \boldsymbol{\omega}^{(j)}.$$

Das hebt sich gegen das letzte Glied in Gl. (1.4-18) weg, so daß dort übrig bleibt

$$\mathbf{K}^{(i)} \dot{\boldsymbol{\omega}}^{(i)} + \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\Psi}_{ij} \dot{\boldsymbol{\omega}}^{(j)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(i)} \mathbf{K}^{(i)} \boldsymbol{\omega}^{(i)} - M \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \boldsymbol{\Theta}^{(i)} \boldsymbol{\Theta}^{(j)\top} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(j)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(j)} \mathbf{B}_{ji}. \quad (1.4-20)$$

Alle 3  $n$  Zeilen können zusammengefaßt werden in der Form

$$(\mathbf{K} + \boldsymbol{\Psi}) \dot{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{K} \boldsymbol{\omega} - \left\| M \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \boldsymbol{\Theta}^{(i)} \boldsymbol{\Theta}^{(j)\top} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(j)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(j)} \mathbf{B}_{ji} \right\|_{i=1, \dots, n}. \quad (1.4-21)$$

Das ist der Beitrag der kinetischen Energie zu den Bewegungsgleichungen des Systems.

### 1.5. Die aus der potentiellen Energie abgeleiteten Anteile der Bewegungsgleichungen

Betrachten wir nun die Beiträge der potentiellen Energie zu den Bewegungsgleichungen.

Aus der potentiellen Energie, Gl. (1.3-9), werden die generalisierten Kräfte berechnet. Die Spaltenmatrix  $\left\| -\frac{\partial V}{\partial q_k} \right\|_{k=1, \dots, 3n}$  enthält die an den Körpern angreifenden Momente aufgelöst in Komponenten entlang den Achsen  $\vec{\psi}^{(i)}$ ,  $\vec{\vartheta}^{(i)}$ ,  $\vec{\varphi}^{(i)}$ . Durch Multiplikation von links mit  $\mathbf{G}^{-1\tau}$  ergibt sich die Spaltenmatrix der Komponenten in den körperfesten Achsensystemen  $\vec{e}^{(i)}$ .

Es gilt also, den Ausdruck

$$-\mathbf{G}^{-1\tau} \left\| \frac{\partial V}{\partial q_k} \right\|_{k=1, \dots, 3n} = -\frac{\kappa}{r_0^3} \left[ \frac{3}{2} \mathbf{G}^{-1\tau} \left\| \frac{\partial}{\partial q_k} (\Theta_3^T \mathbf{K} \Theta_3) \right\|_{k=1, \dots, 3n} + \frac{1}{2} \mathbf{G}^{-1\tau} \left\| \mathbf{1}_n^T \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial q_k} \mathbf{1}_n \right\|_{k=1, \dots, 3n} \right] \quad (1.5-1)$$

umzuformen. Wiederum betrachten wir nur den  $i$ -ten Satz dreier Elemente der Spaltenmatrix. Das erste Glied liefert den Beitrag

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \mathbf{G}^{(i)-1\tau} \left\| \frac{\partial}{\partial q_k^{(i)}} (\Theta_3^T \mathbf{K} \Theta_3) \right\|_{k=1, \dots, 3} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{G}^{(i)-1\tau} \left\| \frac{\partial \Theta_3^{(i)T}}{\partial q_k^{(i)}} \mathbf{K}^{(i)} \Theta_3^{(i)} + \left( \frac{\partial \Theta_3^{(i)T}}{\partial q_k^{(i)}} \mathbf{K}^{(i)} \Theta_3^{(i)} \right)^T \right\|_{k=1, \dots, 3} \\ &= \mathbf{G}^{(i)-1\tau} \left\| \frac{\partial \Theta_3^{(i)T}}{\partial q_k^{(i)}} \mathbf{K}^{(i)} \Theta_3^{(i)} \right\|_{k=1, \dots, 3} \\ &= \mathbf{G}^{(i)-1\tau} \begin{bmatrix} \left[ \frac{\partial \Theta_3^{(i)T}}{\partial \psi^{(i)}} \right] \\ \left[ \frac{\partial \Theta_3^{(i)T}}{\partial \vartheta^{(i)}} \right] \\ \left[ \frac{\partial \Theta_3^{(i)T}}{\partial \varphi^{(i)}} \right] \end{bmatrix} \mathbf{K}^{(i)} \Theta_3^{(i)}. \end{aligned}$$

Der Faktor vor  $\mathbf{K}^{(i)} \Theta_3^{(i)}$  ergibt sich zu  $-\tilde{\Theta}_3^{(i)}$ , wie man durch Ausmultiplizieren leicht nachweisen kann. Damit ist

$$\frac{1}{2} \mathbf{G}^{(i)-1\tau} \left\| \frac{\partial}{\partial q_k^{(i)}} (\Theta_3^T \mathbf{K} \Theta_3) \right\|_{k=1, \dots, 3} = -\tilde{\Theta}_3^{(i)} \mathbf{K}^{(i)} \Theta_3^{(i)}. \quad (1.5-2)$$

Untersuchen wir nun das zweite Glied in Gl. (1.5-1). Der  $i$ -te Satz dreier Elemente ist

$$\frac{1}{2} \mathbf{G}^{(i)-1\top} \left\| \mathbf{1}_n^\top \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial q_k^{(i)}} \mathbf{1}_n \right\|_{k=1, \dots, 3}.$$

Darin ist  $\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial q_k^{(i)}}$  eine symmetrische  $(n \times n)$ -Matrix, die wie die Matrix in Abb. 17 besetzt ist (dort bedeutete allerdings jedes Feld eine Untermatrix, während es nun ein einzelnes Element darstellt). Infolgedessen ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{G}^{(i)-1\top} \left\| \mathbf{1}_n^\top \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial q_k^{(i)}} \mathbf{1}_n \right\|_{k=1, \dots, 3} &= \mathbf{G}^{(i)-1\top} \left\| \sum_{j=1}^n \frac{\partial Z_{ij}}{\partial q_k^{(i)}} \right\|_{k=1, \dots, 3} = \\ &= \mathbf{G}^{(i)-1\top} \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n M \mathbf{B}_{ij} \left( 3 \frac{\partial \boldsymbol{\Theta}_3^{(i)}}{\partial q_k^{(i)}} \boldsymbol{\Theta}_3^{(j)\top} - \frac{\partial \boldsymbol{\Theta}^{(i)}}{\partial q_k^{(i)}} \boldsymbol{\Theta}^{(j)\top} \right) \mathbf{B}_{ji} \right\|_{k=1, \dots, 3} \end{aligned}$$

Die weitere Umformung ähnelt formal sehr derjenigen des früher betrachteten Ausdrucks

$$\frac{1}{2} \mathbf{G}^{-1\top} \left\| \boldsymbol{\omega}^\top \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial q_k} \boldsymbol{\omega} \right\|_{k=1, \dots, 3n}$$

(vgl. die Gln. (1.4-14) und (1.4-16)). Daher wird nur das Ergebnis mitgeteilt.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{G}^{(i)-1\top} \left\| \mathbf{1}_n^\top \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial q_k^{(i)}} \mathbf{1}_n \right\|_{k=1, \dots, 3} &= M \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \left\{ 3 \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{ij}^\top \mathbf{V}^{1i} \\ \mathbf{B}_{ij}^\top \mathbf{V}^{2i} \\ \mathbf{B}_{ij}^\top \mathbf{V}^{3i} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_3^{(j)\top} \mathbf{B}_{ji} - \right. \\ &\left. - \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{ij}^\top \mathbf{D}^{1i} \\ \mathbf{B}_{ij}^\top \mathbf{D}^{2i} \\ \mathbf{B}_{ij}^\top \mathbf{D}^{3i} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}^{(j)\top} \mathbf{B}_{ji} \right\} = M \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{\mathbf{B}}_{ij} (3 \boldsymbol{\Theta}_3^{(i)} \boldsymbol{\Theta}_3^{(j)\top} - \boldsymbol{\Theta}^{(i)} \boldsymbol{\Theta}^{(j)\top}) \mathbf{B}_{ji}. \quad (1.5-3) \end{aligned}$$

$\mathbf{D}^{1i}$ ,  $\mathbf{D}^{2i}$  und  $\mathbf{D}^{3i}$  sind die schon durch Gl. (1.4-15) definierten Matrizen.  $\mathbf{V}^{1i}$ ,  $\mathbf{V}^{2i}$ ,  $\mathbf{V}^{3i}$  sind dreizeilige Spaltenmatrizen, deren Elemente  $V_l^{\alpha i}$  ( $\alpha, l = 1, 2, 3$ ) sich berechnen zu

$$V_l^{\alpha i} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{G}_{k\alpha}^{(i)-1} \frac{\partial \Theta_{3l}^{(i)}}{\partial q_k^{(i)}}.$$

Die Gln. (1.5-2) und (1.5-3) erlauben, Gl. (1.5-1) in der Form zu schreiben

$$\begin{aligned}
 & - \mathbf{G}^{-1 \top} \left\| \frac{\partial V}{\partial q_k} \right\|_{k=1, \dots, 3n} = \\
 & = \frac{\gamma}{r_0^3} \left[ 3 \tilde{\mathbf{\Theta}}_3 \mathbf{K} \mathbf{\Theta}_3 + M \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{\mathbf{B}}_{ij} (\mathbf{\Theta}^{(i)} \mathbf{\Theta}^{(j) \top} - 3 \mathbf{\Theta}_3^{(i)} \mathbf{\Theta}_3^{(j) \top}) \mathbf{B}_{ji} \right\|_{i=1, \dots, n} \right]
 \end{aligned} \tag{1.5-4}$$

$\tilde{\mathbf{\Theta}}_3$  ist eine  $(3n \times 3n)$ -Matrix, auf deren Hauptdiagonale die Matrizen  $\tilde{\mathbf{\Theta}}_3^{(i)}$  angeordnet sind.

Gl. (1.5-4) liefert den Beitrag der potentiellen Energie zu den Bewegungsgleichungen des Systems.

### 1.6. Zusammenfassende Formulierung der Bewegungsgleichungen und Berücksichtigung der (u. U. nichtkonservativen) Reaktionsmomente in den Gelenken

Aus den Gln. (1.4-21) und (1.5-4) ergeben sich die gesuchten Bewegungsgleichungen eines Systems von Körpern

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{K} + \mathbf{\Psi}) \dot{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{K} \boldsymbol{\omega} - M \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \mathbf{\Theta}^{(i)} \mathbf{\Theta}^{(j) \top} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(j)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(j)} \mathbf{B}_{ji} \right\|_{i=1, \dots, n} = \\
 & = \frac{\gamma}{r_0^3} \left[ 3 \tilde{\mathbf{\Theta}}_3 \mathbf{K} \mathbf{\Theta}_3 + M \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{\mathbf{B}}_{ij} (\mathbf{\Theta}^{(i)} \mathbf{\Theta}^{(j) \top} - 3 \mathbf{\Theta}_3^{(i)} \mathbf{\Theta}_3^{(j) \top}) \mathbf{B}_{ji} \right\|_{i=1, \dots, n} \right].
 \end{aligned} \tag{1.6-1}$$

Die Masse  $M$ , die Trägheitsmatrizen  $\mathbf{K}^{(i)}$  und die Vektoren  $\vec{\mathbf{B}}_{ij}$  der in Kapitel (1.2.4) definierten erweiterten Körper erweisen sich als die das dynamische Verhalten des Systems allein bestimmenden Parameter. Sie lassen sich mit Hilfe der Sätze 4 und 7 in Verbindung mit den Gln. (1.2.6-6) und (1.2.6-9) leicht für ein gegebenes System von Körpern bestimmen.

Bis hierher wurde angenommen, daß alle die Bewegungen des Systems beeinflussenden Momente sich ergeben aus der potentiellen Energie des Systems im Gravitationsfeld der Erde. Zu diesen sind jedoch noch Momente zu addieren, die in den Gelenkverbindungen zwischen den einzelnen Körpern auftreten.

Die Ursachen der Gelenkmomente können sehr verschiedener Natur sein. Zwei Gruppen sind zu unterscheiden: Zu der einen gehören Momente, die unbeabsichtigt durch Lagerreibung oder absichtlich durch eingebaute Dämpfer und Drehfedermechanismen hervorgerufen werden. Die andere Gruppe umfaßt die Zwangsmomente, die durch die Aufhebung von Freiheitsgraden der relativen Drehung zweier Körper durch das sie verbindende Gelenk verursacht werden. Ein Freiheitsgrad geht verloren, wenn die Verbindung ein Kardangelenke ist, zwei Freiheitsgrade im Fall einer Achse. Die Aufhebung aller drei Freiheitsgrade führt ein  $n$ -Körper-System auf eines von  $n - 1$  Körpern zurück.

Die Summe aller im Gelenk  $a$  ( $a = 1, \dots, n-1$ ) wirkenden Reaktionsmomente wird repräsentiert durch den Vektor  $\vec{Y}_a$ . Wir vereinbaren, daß das Moment  $+\vec{Y}_a$  an dem Körper angreift, der vom Bezugskörper 1 weiter entfernt liegt (sei dies der Körper  $i$ ; man beachte, daß dann nach Gl. (1.2.1-1)  $S_{ia} = +1$  ist).

Die Summe aller am Körper  $i$  angreifenden Gelenkmomente ist darstellbar durch die  $i$ -te Zeile der Spaltenmatrix  $\mathbf{S} \parallel \vec{Y}_a \parallel_{a=1, \dots, n-1}$ . Die Komponenten dieses Moments im körperfesten Koordinatensystem  $\vec{e}^{(i)}$  sind folglich gleich dem Skalarprodukt der Spaltenmatrix  $\vec{e}^{(i)}$  mit der  $i$ -ten Zeile von  $\mathbf{S} \parallel \vec{Y}_a \parallel_{a=1, \dots, n-1}$ . Alle  $n$  Momentensummen für die  $n$  Körper — aufgelöst in Komponenten in deren eigenen Koordinatensystemen — werden aufgeführt in der  $3 \times n$ -zeiligen Spaltenmatrix

$$\vec{e} \odot \mathbf{S} \parallel \vec{Y}_a \parallel_{a=1, \dots, n-1}. \quad (1.6-2)$$

Dieser Ausdruck ist der rechten Seite von Gl. (1.6-1) hinzuzufügen.

### 1.7. Kinematische Differentialgleichungen

Das Differentialgleichungssystem mit Zusatzglied nach Gl. (1.6-2) ist noch nicht vollständig. Es enthält neben den Variablen  $\omega_{1,2,3}^{(i)}$  die  $n$  unbekannten Transformationsmatrizen  $\Theta^{(i)}$ . Die fehlenden Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten sind kinematische Differentialgleichungen, die die  $\omega^{(i)}$  und  $\Theta^{(i)}$  verknüpfen. In diesen Gleichungen sind die Körper entkoppelt.

Die einfachste und für numerische Rechnungen günstigste Formulierung der kinematischen Beziehungen gewinnt man durch die Beschreibung der Lage jedes Körpers in einem Inertialsystem durch vier reelle Parameter.

Wählen wir das Inertialsystem mit den Achseneinheitsvektoren  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  derart, daß es zur Zeit  $t = t_0$  parallel zum Bezugssystem  $\vec{x}_{1,2,3}$  gerichtet ist. Zur Zeit  $t \geq t_0$  gilt dann die Beziehung

$$\begin{bmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \\ \vec{x}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{U}(t) \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} \cos \omega_0(t-t_0) & 0 & -\sin \omega_0(t-t_0) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \omega_0(t-t_0) & 0 & \cos \omega_0(t-t_0) \end{bmatrix} \quad (1.7-1)$$

Die Transformation vom körperfesten Achsensystem  $\vec{e}^{(i)}$  zum Inertialsystem lautet dann

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix}^{(i)} = \Theta^{(i)}(t) \cdot \mathbf{U}(t) \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{bmatrix}; \quad i = 1, \dots, n.$$

Die Lage des Körpers  $i$  im Inertialsystem wird beschrieben durch vier Parameter  $\beta_0^{(i)}, \beta_1^{(i)}, \beta_2^{(i)}, \beta_3^{(i)}$ , die definiert sind durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}\beta_0^{(i)} &= \cos \varphi^{(i)}/2; & \beta_1^{(i)} &= n_1^{(i)} \sin \varphi^{(i)}/2 \\ \beta_2^{(i)} &= n_2^{(i)} \sin \varphi^{(i)}/2 \\ \beta_3^{(i)} &= n_3^{(i)} \sin \varphi^{(i)}/2.\end{aligned}$$

$n_1^{(i)}, n_2^{(i)}, n_3^{(i)}$  sind die Richtungskosinus eines Einheitsvektors im Inertialsystem, um den der Körper  $i$  im Rechtsschraubensinn um den Winkel  $\varphi^{(i)}$  gedreht werden muß, um aus seiner (als bekannt anzusehenden) Anfangslage zur Zeit  $t = t_0$  in die Lage zur Zeit  $t$  zu gelangen.  $\varphi^{(i)}, n_{1,2,3}^{(i)}$  und  $\beta_{0,1,2,3}^{(i)}$  sind zeitlich veränderliche Größen. Als Funktion der vier Parameter ausgedrückt ist die Transformationsmatrix (siehe z. B. [29])

$$\Theta^{(i)} U = \begin{bmatrix} 2\beta_0^2 + 2\beta_1^2 - 1 & 2(\beta_1\beta_2 + \beta_0\beta_3) & 2(\beta_1\beta_3 - \beta_0\beta_2) \\ 2(\beta_1\beta_2 - \beta_0\beta_3) & 2\beta_0^2 + 2\beta_2^2 - 1 & 2(\beta_2\beta_3 + \beta_0\beta_1) \\ 2(\beta_1\beta_3 + \beta_0\beta_2) & 2(\beta_2\beta_3 - \beta_0\beta_1) & 2\beta_0^2 + 2\beta_3^2 - 1 \end{bmatrix}^{(i)}; i=1, \dots, n$$

und folglich

$$\Theta^{(i)} = \begin{bmatrix} 2\beta_0^2 + 2\beta_1^2 - 1 & 2(\beta_1\beta_2 + \beta_0\beta_3) & 2(\beta_1\beta_3 - \beta_0\beta_2) \\ 2(\beta_1\beta_2 - \beta_0\beta_3) & 2\beta_0^2 + 2\beta_2^2 - 1 & 2(\beta_2\beta_3 + \beta_0\beta_1) \\ 2(\beta_1\beta_3 + \beta_0\beta_2) & 2(\beta_2\beta_3 - \beta_0\beta_1) & 2\beta_0^2 + 2\beta_3^2 - 1 \end{bmatrix}^{(i)} \cdot U^T(t); i=1, \dots, n \quad (1.7-2)$$

Die Differentialgleichungen für die vier Parameter lauten

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta}_0 \\ \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \end{bmatrix}^{(i)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}^{(i)} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}^{(i)}; i=1, \dots, n \quad (1.7-3)$$

Die Gln. (1.7-1) bis (1.7-3) sind die gesuchten kinematischen Beziehungen.

### 1.8. Eine Abschätzung des Einflusses der Gravitationskräfte zwischen den einzelnen Körpern des Systems

Die aufgestellten Bewegungsgleichungen berücksichtigen als eingeprägte Kräfte nur die Wirkungen des Gravitationsfeldes der Erde. Außerdem wirkt jedoch noch die Massenanziehung zwischen den einzelnen Körpern des Systems. Ihre Berücksichtigung würde auf unlösbare Probleme hinauslaufen. Die folgende Abschätzung zeigt, unter welchen Umständen diese Kräfte vernachlässigt werden können.

Wir betrachten zwei homogene Kugeln der Masse  $m$ , deren Mittelpunkte den Abstand  $a$  haben ( $a \ll r_0$ ). Das Gravitationsfeld der Erde verursacht eine Kraft  $F_1$ , die die beiden Körper auseinandertreibt. Ihr Betrag schwankt je nach der Lage der Massenmittelpunkte der beiden Kugeln relativ zum Gravita-

tionszentrum zwischen Null und einem Höchstwert  $F_{1\max}$ , der auftritt, wenn alle drei Punkte in einer Geraden liegen. Er beträgt

$$F_{1\max} = \gamma M_E \left[ \frac{m}{(r_0 - a/2)^2} - \frac{m}{(r_0 + a/2)^2} \right] \approx \gamma \frac{m M_E}{r_0^2} 2 \frac{a}{r_0}.$$

Darin sind  $\gamma$  die universelle Gravitationskonstante und  $M_E$  die Masse der Erde.

Die gegenseitige Anziehungskraft  $F_2$  der beiden Körper ist unabhängig von deren Stellung relativ zum Erdmittelpunkt und beträgt

$$F_2 = \gamma \frac{mm}{a^2}.$$

Das Verhältnis der beiden Kräfte ist

$$\frac{F_{1\max}}{F_2} = 2 \frac{M_E}{m} \left( \frac{a}{r_0} \right)^3.$$

Ein Zahlenbeispiel:

$$M_E \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}; \quad m = 6 \cdot 10^3 \text{ kg}; \quad r_0 = 7 \cdot 10^3 \text{ km}; \quad a = 7 \text{ m}$$

(das sind Größen, die sich schon jetzt technisch verwirklichen lassen).

$$\text{Es ergibt sich ein Verhältnis } \frac{F_{1\max}}{F_2} = 2000.$$

In diesem Fall ist  $F_2$  also gegen  $F_{1\max}$  vernachlässigbar.  $F_2$  ist aber (bei denselben Zahlenwerten) auch dann vernachlässigbar, wenn infolge der Stellung des Systems relativ zum Gravitationszentrum  $F_1 \ll F_{1\max}$ , wenn nur die Gelenkverbindung der Körper eine Federsteifigkeit besitzt, die unter der Wirkung der Kraft  $F_2$  allein keine merkliche Verformung zuläßt. Das ganze System kann dann als ein starrer Körper aufgefaßt werden, solange nur die inneren Massenanziehungskräfte betrachtet werden. Damit sind diese ohne Einfluß. Hinsichtlich der je nach Lage des Systems verschiedenen großen Kräfte auf Grund der Erdanziehung verhält sich das System dagegen nicht wie ein starrer Körper, da diese wesentlich größer sein können.

Die Lagenstabilisierung eines Satelliten mit Hilfe der Gravitationskräfte ist um so wirkungsvoller, je größer diese Kräfte sind. Aus der Formel für  $F_{1\max}$  sieht man, daß das bei gegebener Masse  $m$  nur durch einen großen Wert für  $a$  zu erreichen ist. Damit ist dann aber auch gesichert, daß  $F_{1\max} \gg F_2$  ist.

### 1.9. Die Reaktionskräfte in den Gelenken

Die Gl. (A1–4) im Anhang zeigt, daß  $S \parallel \vec{X}_a \parallel_{a=1, \dots, n-1}$  eine  $n$ -zeilige Spaltenmatrix ist, deren  $i$ -tes Element der resultierende Vektor  $\vec{N}^{(i)}$  aller am Körper  $i$  angreifenden Gelenkkräfte ist. Sei  $N^{(i)}$  die Spaltenmatrix der Komponenten von  $\vec{N}^{(i)}$  im Koordinatensystem  $\vec{e}^{(i)}$ ,  $N$  die  $3n$ -zeilige Spaltenmatrix aller  $N^{(i)}$ . Dann ist wegen Gl. (A1–6)

$$N = \vec{e} \odot S \parallel \vec{X}_a \parallel_{a=1, \dots, n-1} = \vec{e} \odot \left[ m \frac{d^2}{dt^2} (\vec{e}^T R) - \mu \vec{e}^T F \right].$$



Wir übernehmen aus dem ersten Kapitel und aus dem Anhang die Ergebnisse

$$\vec{e}^\top \mathbf{R} = -\boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{T}^\top \mathbf{C}^\top \vec{e} \mathbf{1}_n \quad (\text{Satz 5})$$

$$\frac{d^2}{dt^2} (\vec{e}^\top \mathbf{R}) = \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{T}^\top \mathbf{C}^\top (\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}}) \vec{e} \mathbf{1}_n \quad (\text{Gl. (A1-10)})$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(i)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(i)} = \boldsymbol{\omega}^{(i)} \boldsymbol{\omega}^{(i)\top} - \boldsymbol{\omega}^{(i)\top} \boldsymbol{\omega}^{(i)} \mathbf{E}_3 \quad (\text{Gl. (1.4-19)})$$

$$\vec{e}^\top \mathbf{F} = -\frac{\kappa}{r_0^3} \vec{r}_0 \mathbf{m} \mathbf{1}_n + \frac{\kappa}{r_0^3} \mathbf{m} \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{T}^\top \mathbf{C}^\top \left\| (\mathbf{E}_3 - 3 \boldsymbol{\Theta}_3^{(i)} \boldsymbol{\Theta}_3^{(i)\top}) \vec{e}^{(i)} \right\|_{i=1, \dots, n} \quad (\text{Gl. (A3-1)})$$

$$\boldsymbol{\mu} \mathbf{m} \boldsymbol{\mu}^\top = \mathbf{m} \boldsymbol{\mu}^\top \quad (\text{Gl. (A1-12)})$$

$$\boldsymbol{\mu} \mathbf{m} \mathbf{1}_n = \mathbf{0}.$$

Damit ergibt sich

$$\mathbf{N} = \vec{e} \odot \mathbf{m} \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{T}^\top \mathbf{C}^\top \left\| \left[ \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(i)} - \boldsymbol{\omega}^{(i)} \boldsymbol{\omega}^{(i)\top} + 3 \frac{\kappa}{r_0^3} \boldsymbol{\Theta}_3^{(i)} \boldsymbol{\Theta}_3^{(i)\top} + \left( \boldsymbol{\omega}^{(i)\top} \boldsymbol{\omega}^{(i)} - \frac{\kappa}{r_0^3} \right) \mathbf{E}_3 \right] \vec{e}^{(i)} \right\|_{i=1, \dots, n}.$$

Satz 4 sagt aus, daß

$$(\boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{T}^\top \mathbf{C}^\top)_{ij} = -\mathbf{B}_{ji}^\top.$$

Für die Summe der Kräfte an Körper  $i$  ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^{(i)} &= -m^{(i)} \sum_{j=1}^n \vec{e}^{(i)} \odot \mathbf{B}_{ji}^\top \left[ \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(j)} - \boldsymbol{\omega}^{(j)} \boldsymbol{\omega}^{(j)\top} + 3 \frac{\kappa}{r_0^3} \boldsymbol{\Theta}_3^{(j)} \boldsymbol{\Theta}_3^{(j)\top} + \left( \boldsymbol{\omega}^{(j)\top} \boldsymbol{\omega}^{(j)} - \frac{\kappa}{r_0^3} \right) \mathbf{E}_3 \right] \vec{e}^{(j)} \\ &= m^{(i)} \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\Theta}^{(i)} \boldsymbol{\Theta}^{(j)\top} \left[ \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(j)} + \boldsymbol{\omega}^{(j)} \boldsymbol{\omega}^{(j)\top} - 3 \frac{\kappa}{r_0^3} \boldsymbol{\Theta}_3^{(j)} \boldsymbol{\Theta}_3^{(j)\top} - \left( \boldsymbol{\omega}^{(j)\top} \boldsymbol{\omega}^{(j)} - \frac{\kappa}{r_0^3} \right) \mathbf{E}_3 \right] \mathbf{B}_{ji}. \quad (1.9-1) \end{aligned}$$

## 2. Gleichgewichtsbedingungen für Systeme auf kreisförmigen Umlaufbahnen

### 2.1. Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen aus den Bewegungsgleichungen

In Kapitel (1.3) hatten wir festgelegt, daß die  $\vec{x}_3$ -Achse des in Kapitel (1.2.3) eingeführten äußeren Bezugssystems  $\vec{x}_{1,2,3}$  in die Richtung von  $\vec{r}_0$  (der ört-

lichen Vertikale) fallen soll. Jetzt legen wir auch die anderen Achsen fest. Koordinatenursprung sei der Massenmittelpunkt des Systems. Die Achse  $\vec{x}_1$  weist (s. Abb. 18) in die Richtung der Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes des Systems, die Achse  $\vec{x}_2$  folglich in die Richtung der Umlaufwinkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}_0$ .

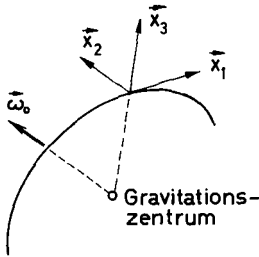


Abb. 18

Von Gleichgewichtslagen sprechen wir bei Systemkonfigurationen, die im  $\vec{x}_{1,2,3}$ -System zeitlich unveränderlich bestehen können. Für sie gilt:

$$\frac{\kappa}{r_0^3} = \omega_0^2 \quad (2.1-1)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}^{(i)} &= 0 \\ \omega^{(i)} &= \omega_0 \Theta_2^{(i)} \\ \tilde{\omega}^{(i)} &= \omega_0 \tilde{\Theta}_2^{(i)} \end{aligned} \right\} i = 1, \dots, n \quad (2.1-2)$$

Die Bewegungsgleichungen (1.6-1) mit Zusatzglied nach Gl. (1.6-2) werden damit zu Gleichgewichtsbedingungen der Form

$$\begin{aligned} & \omega_0^2 \left\{ \tilde{\Theta}_2 K \Theta_2 - M \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{B}_{ij} \Theta^{(i)} \Theta^{(j)\top} \tilde{\Theta}_2^{(j)} \tilde{\Theta}_2^{(j)} B_{ji} \right\|_{i=1, \dots, n} \right\} = \\ & = \omega_0^2 \left\{ 3 \tilde{\Theta}_3 K \Theta_3 + M \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{B}_{ij} (\Theta^{(i)} \Theta^{(j)\top} - 3 \Theta_3^{(i)} \Theta_3^{(j)\top}) B_{ji} \right\|_{i=1, \dots, n} \right\} + \\ & + \vec{e} \odot S \parallel \vec{Y}_a \parallel_{a=1, \dots, n-1}. \end{aligned}$$

Wegen Gl. (1.4-19) ist

$$\Theta^{(i)} \Theta^{(j)\top} \tilde{\Theta}_2^{(j)} \tilde{\Theta}_2^{(j)} = \Theta_2^{(i)} \Theta_2^{(j)\top} - \Theta^{(i)} \Theta^{(j)\top},$$

so daß

$$\tilde{\Theta}_2 K \Theta_2 - M \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{B}_{ij} \Theta_2^{(i)} \Theta_2^{(j)\top} B_{ji} \right\|_{i=1, \dots, n} =$$

$$= 3 \left\{ \tilde{\Theta}_3 K \Theta_3 - M \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{B}_{ij} \Theta_3^{(i)} \Theta_3^{(j)T} B_{ji} \right\|_{t=1, \dots, n} \right\} + \\ + \frac{1}{\omega_0^2} \vec{e} \odot S \| \vec{Y}_a \|_{a=1, \dots, n-1}$$

oder

$$\tilde{\Theta}_2 K \Theta_2 + M \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{\Theta}_2^{(i)} B_{ij} B_{ji}^T \Theta_2^{(j)} \right\|_{t=1, \dots, n} = \\ = 3 \left\{ \tilde{\Theta}_3 K \Theta_3 + M \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{\Theta}_3^{(i)} B_{ij} B_{ji}^T \Theta_3^{(j)} \right\|_{t=1, \dots, n} \right\} + \\ + \frac{1}{\omega_0^2} \vec{e} \odot S \| \vec{Y}_a \|_{a=1, \dots, n-1}$$

oder

$$\tilde{\Theta}_2 A \Theta_2 = 3 \tilde{\Theta}_3 A \Theta_3 + \frac{1}{\omega_0^2} \vec{e} \odot S \| \vec{Y}_a \|_{a=1, \dots, n-1} \quad (2.1-3)$$

mit der symmetrischen ( $3n \times 3n$ )-Matrix  $A$ , deren Untermatrizen lauten

$$A_{ij} = \begin{cases} K^{(i)} & \text{für } i = j \\ -J_{ij} = M B_{ij} B_{ji}^T & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (2.1-4)$$

Die  $3n$  Gleichungen (2.1-3) reichen zur Bestimmung der Unbekannten  $\Theta_2^{(i)}$  und  $\Theta_3^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) nicht aus. Sie sind zu ergänzen durch die  $3n$  Orthogonalitätsbeziehungen

$$\left. \begin{aligned} \Theta_2^{(i)T} \Theta_2^{(i)} &= \Theta_3^{(i)T} \Theta_3^{(i)} = 1 \\ \Theta_2^{(i)T} \Theta_3^{(i)} &= 0 \end{aligned} \right\} i = 1, \dots, n. \quad (2.1-5)$$

## 2.2. Gelenkkräfte in den Gleichgewichtslagen

Gl. (1.9-1) ist ein Ausdruck für die Summe aller am Körper  $i$  angreifenden Gelenkkräfte ausgedrückt in Komponenten im System  $\vec{e}^{(i)}$ . Einsetzen der Gln. (2.1-1) und (2.1-2) liefert für die Gleichgewichtslagen den Ausdruck

$$N^{(i)} = \omega_0^2 m^{(i)} \sum_{j=1}^n \Theta^{(i)} \Theta^{(j)T} [\Theta_2^{(j)} \Theta_2^{(j)T} - 3 \Theta_3^{(j)} \Theta_3^{(j)T}] B_{ji}.$$

Wählen wir nun die körperfesten Koordinatensysteme so, daß sie in der betrachteten Gleichgewichtslage alle parallel zum Achsensystem  $\vec{x}_{1,2,3}$  ausgerichtet sind. Dann ist  $\Theta^{(j)} = E_3$  für  $j = 1, \dots, n$ . Die Größen  $B_{ji}$  wie überhaupt alle von der Wahl der Koordinatensysteme  $\vec{e}^{(i)}$  abhängigen Größen seien in diesem besonderen System durch einen Stern gekennzeichnet<sup>11)</sup>. Dann ist

<sup>11)</sup> Diese Vereinbarung soll auch später stets gelten.

$$\mathbf{N}^{(i)*} = \omega_0^2 m^{(i)} \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -3 \end{bmatrix} \sum_{j=1}^n \mathbf{B}_{ji}^*$$

oder wegen Satz 6

$$\mathbf{N}^{(i)*} = \omega_0^2 m^{(i)} \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -3 \end{bmatrix} \mathbf{R}^{(i)*}. \quad (2.2-1)$$

In einer Gleichgewichtslage kann jede Gruppe von Körpern aufgefaßt werden als *ein* Körper. Infolgedessen läßt sich jede einzelne Gelenkkraft  $\mathbf{X}_a$  ( $a = 1, \dots, n-1$ ) durch die Gl. (2.2-1) darstellen.  $\mathbf{R}^{(i)*}$  ist lediglich zu ersetzen durch den Vektor vom Massenmittelpunkt des Systems zum Massenmittelpunkt der Gruppe von Körpern, an der außer der gesuchten Gelenkkraft  $\mathbf{X}_a$  keine weitere angreift und die den Körper 1 nicht enthält<sup>12)</sup> und für  $m^{(i)}$  ist die gesamte Masse dieser Gruppe von Körpern einzusetzen.

### 2.3. Die Gleichgewichtsbedingungen für Systeme ohne Gelenkmomente

Im folgenden werden nur solche Systeme untersucht, deren sämtliche Gelenke reibungsfreie Kugelgelenke ohne Rückstellfedern und Dämpfer sind. Dann sind alle Gelenkmomente  $\mathbf{Y}_a$  gleich Null, und die Gleichgewichtsbedingungen (2.1-3) nehmen die Gestalt an

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_2 \mathbf{A} \Theta_2 &= 3 \tilde{\Theta}_3 \mathbf{A} \Theta_3 \\ \mathbf{A}_{ij} &= \begin{cases} \mathbf{K}^{(i)} & \text{für } i = j \\ \mathbf{M} \mathbf{B}_{ij} \mathbf{B}_{ji}^T & \text{für } i \neq j. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3-1)$$

Diesem Sonderfall einen breiten Raum zu geben, erscheint zunächst ungerechtfertigt, wenn man bedenkt, daß derartige Körpersysteme als Satelliten wohl kaum zu erwarten sind. Der Grund für die Einschränkung ist die mathematische Schwierigkeit. Auch der Sonderfall liefert aber praktisch wertvolle Erkenntnisse, wie folgende Überlegung zeigt. Nehmen wir an, eine Gleichgewichtslage eines Systems ohne Gelenkmomente sei gefunden. Ersetzt man in dieser Lage des Systems einige oder alle Kugelgelenke durch Achsen und/oder Kardangelenke, die in beliebigen Richtungen durch die Körper hindurchgesteckt werden<sup>13)</sup> und fügt man außerdem diesen neuen Gelenken noch Dämpfer und Drehfederelemente hinzu, die in der betrachteten Gleichgewichtslage keine Gelenkmomente ausüben, dann bleibt das System offensichtlich in dieser Lage auch weiterhin im Gleichgewicht. Die Bewegungen, die es bei Störungen aus der Gleichgewichtslage ausführt, sind jedoch durch die konstruktiven Veränderungen maßgebend bestimmt. Ebenso kann das Stabilitätsverhalten vieler Gleichgewichtslagen<sup>14)</sup> verändert werden.

<sup>12)</sup> Die letzte Vorschrift folgt aus der Vorzeichenvereinbarung für die Gelenkreaktionen. Sie steckt in der Definition der Matrix  $\mathbf{S}$ , Gl. (1.2.1-1).

<sup>13)</sup> Die einzige Forderung ist die nach Erhaltung der Lage der Gelenkpunkte auf den einzelnen Körpern.

<sup>14)</sup> Nicht aller, wie in Kapitel (4.3) gezeigt wird.

Es ist somit die Möglichkeit gegeben, die Gleichgewichtslagen festzustellen an Hand eines Systems, das dem Konstrukteur noch weiten Spielraum läßt, später die kinematischen Eigenschaften, den Grad der Stabilität und die Eigenfrequenzen des Systems zu variieren.

Bevor die Gleichgewichtsbedingungen (2.3-1) in andere Formen überführt werden, stellen wir fest:

Die Gleichgewichtslagen eines Systems von Körpern ohne Gelenkmomente sind unabhängig von  $\omega_0$  und damit vom Bahnradius  $r_0$ . Die Gleichgewichtslagen von Systemen mit Gelenkmomenten hängen i. a. von  $r_0$  ab.

## 2.4. Andere Formulierungen der Gleichgewichtsbedingungen

Die Gleichgewichtsbedingungen (2.3-1) lauten ausmultipliziert

$$\begin{aligned} \Theta_2^{(i)} \left[ K^{(i)} \Theta_2^{(i)} + M \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n B_{ij} B_{ji}^T \Theta_2^{(j)} \right] = \\ = 3 \Theta_3^{(i)} \left[ K^{(i)} \Theta_3^{(i)} + M \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n B_{ij} B_{ji}^T \Theta_3^{(j)} \right]; \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.4-1)$$

Es gelten die Orthonormalitätsbeziehungen

$$\left. \begin{aligned} \Theta_\alpha^{(i)T} \Theta_\beta^{(i)} &= \delta_{\alpha\beta} \\ \Theta_\alpha^{(i)} \Theta_\beta^{(i)} &= \sum_{\gamma=1}^3 \Theta_\gamma^{(i)} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} i &= 1, \dots, n \\ \alpha, \beta &= 1, \dots, 3. \end{aligned}$$

Multipliziert man Gl. (2.4-1) nacheinander von links her mit  $\Theta_3^{(i)T}$ ,  $\Theta_2^{(i)T}$  und  $\Theta_1^{(i)T}$ , so ergibt sich bei Beachtung dieser Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \Theta_1^{(i)T} \left[ K^{(i)} \Theta_2^{(i)} + M \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n B_{ij} B_{ji}^T \Theta_2^{(j)} \right] &= 0 \\ \Theta_1^{(i)T} \left[ K^{(i)} \Theta_3^{(i)} + M \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n B_{ij} B_{ji}^T \Theta_3^{(j)} \right] &= 0 \\ \Theta_3^{(i)T} \left[ K^{(i)} \Theta_2^{(i)} + M \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n B_{ij} B_{ji}^T \Theta_2^{(j)} \right] &= \\ = -3 \Theta_2^{(i)T} \left[ K^{(i)} \Theta_3^{(i)} + M \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n B_{ij} B_{ji}^T \Theta_3^{(j)} \right] \end{aligned} \right\} \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.4-2)$$

Auch die 3  $n$ -dimensionalen Spaltenmatrizen  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$  und  $\Theta_3$  sind orthogonal:

$$\left. \begin{aligned} \Theta_\alpha^T \Theta_\beta &= n \delta_{\alpha\beta} \\ \Theta_\alpha \Theta_\beta &= \sum_{\gamma=1}^3 \Theta_\gamma \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \end{aligned} \right\} \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 3.$$

Multipliziert man Gl. (2.3-1) von links her nacheinander mit  $\Theta_3^\top$ ,  $\Theta_2^\top$  und  $\Theta_1^\top$ , dann erhält man

$$\begin{aligned}\Theta_1^\top A \Theta_2 &= 0 \\ \Theta_1^\top A \Theta_3 &= 0 \\ \Theta_3^\top A \Theta_2 &= -3 \Theta_2^\top A \Theta_3.\end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie von  $A$  ist aber auch  $\Theta_3^\top A \Theta_2 = \Theta_2^\top A \Theta_3$ . Folglich gilt die verallgemeinerte Orthogonalitätsbeziehung

$$\Theta_\alpha^\top A \Theta_\beta = 0 \quad \text{für } \alpha \neq \beta. \quad (2.4-3)$$

Zu einer häufig benutzten Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen gelangt man, wenn man wieder die besonderen körperfesten Koordinatensysteme wählt, die in einer gerade betrachteten Gleichgewichtslage zu  $\Theta^{(i)} = E_3$  führen. Aus Gl. (2.4-2) ergeben sich dann sofort die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} K_{12}^{(i)*} &= M \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n B_{ij1}^* B_{ji2}^* \\ K_{13}^{(i)*} &= M \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n B_{ij1}^* B_{ji3}^* \\ K_{23}^{(i)*} &= M \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \left( \frac{3}{4} B_{ij2}^* B_{ji3}^* + \frac{1}{4} B_{ij3}^* B_{ji2}^* \right) \end{aligned} \right\} i = 1, \dots, n. \quad (2.4-4)$$

für die Deviationsmomente der erweiterten Körper im Koordinatensystem  $\vec{x}_{1,2,3}$ .

### 3. Gleichgewichtslagen

#### 3.1. Der Sonderfall des einzelnen starren Körpers.

Schlußfolgerungen für Systeme mit  $n$  Körpern

Im Fall des einzelnen starren Körpers sind die Trägheitsmatrizen  $K$  und  $I$  des erweiterten und des gegebenen Körpers identisch. Vektoren  $\vec{B}_{ij}$  existieren nicht. Aus Gl. (2.4-4) folgt dann sofort

$$I_{12}^* = I_{13}^* = I_{23}^* = 0.$$

Die Gleichgewichtslagen sind also dadurch gekennzeichnet, daß die Hauptträgheitsachsen des Körpers mit den Koordinatenachsen  $\vec{x}_{1,2,3}$  zusammenfallen. Andere Gleichgewichtslagen gibt es nicht<sup>15)</sup>.

Das soeben gewonnene Ergebnis erlaubt folgende Aussage: Befindet sich ein System von  $n$  Körpern in einer Gleichgewichtslage, dann sind die Achsen

<sup>15)</sup> Gegenteilige Ansichten sind noch in den letzten Jahren in mehreren Veröffentlichungen vertreten worden.

$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$  zentrale Hauptträgheitsachsen des gesamten Systems. Denn das System von Körpern kann, wenn es sich in Ruhe in seiner Gleichgewichtslage befindet, als ein einzelner starrer Körper betrachtet werden.

Die Lösungen für den einzelnen starren Körper zeichnen sich u. a. durch folgende zwei Eigenschaften aus, die den Lösungen der Gl. (2.3-1) für  $n > 1$  i. a. nicht zukommen.

1. Der Faktor 3 in Gl. (2.3-1) hat keinen Einfluß auf die Lösung. Beide Seiten der Gleichung sind für sich gleich Null.
2. Der Körper befindet sich erneut im Gleichgewicht, wenn er aus einer Gleichgewichtslage um irgendeine der Achsen  $\vec{x}_{1,2,3}$  um  $90^\circ$  herausgedreht wird.

In den folgenden Kapiteln werden spezielle Gruppen von Lösungen der Gleichgewichtsbedingungen untersucht, die zum Teil unabhängig vom Faktor 3 sind, zum Teil durch ihn mitbestimmt werden.

An dieser Stelle wollen wir die Frage beantworten: Welche Bedingungen müssen zusätzlich zu den Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein, damit ein System von Körpern stets wieder im Gleichgewicht ist, wenn es in seiner Gesamtheit, d. h. ohne Änderung der Lage seiner Körper relativ zueinander,  $90^\circ$ -Drehungen unterworfen wird, wie sie oben unter (2) beschrieben werden.

Wir betrachten zu diesem Zweck die Gl. (2.4-4). Eine Drehung des gesamten Systems um eine der  $\vec{x}$ -Achsen (z. B. um  $\vec{x}_3$ ) um  $90^\circ$  bedeutet eine Vertauschung zweier Indizes (im Beispiel die Vertauschung der Indizes 1 und 2). Die linken Seiten der Gleichungen behalten dabei ihre ursprünglichen Werte, die rechten dann, wenn die Summe der Vektorprodukte  $\sum_{j=1}^n \vec{B}_{ij} \times \vec{B}_{ji}$  für alle  $i = 1, \dots, n$  den Wert Null hat (der Fall  $j = i$  braucht bei dieser Summation nicht ausgeschlossen zu werden).

Angewandt auf das Zwei-Körper-System lautet die Bedingung

$$\vec{B}_{12} \times \vec{B}_{21} = \vec{0}.$$

d. h. der Gelenkpunkt muß auf der Verbindungslinie der beiden Massenmittelpunkte liegen.

Beim Drei-Körper-System lautet die Bedingung

$$\begin{aligned}\vec{B}_{12} \times \vec{B}_{21} + \vec{B}_{13} \times \vec{B}_{31} &= \vec{0} \\ \vec{B}_{21} \times \vec{B}_{12} + \vec{B}_{23} \times \vec{B}_{32} &= \vec{0} \\ \vec{B}_{31} \times \vec{B}_{13} + \vec{B}_{32} \times \vec{B}_{23} &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Nur zwei dieser Gleichungen sind linear unabhängig. Die erste und dritte können (s. Abb. 19) in der Form

$$\begin{aligned}\vec{B}_{13} \times (\vec{B}_{21} + \vec{B}_{31}) &= \vec{0} \\ \vec{B}_{31} \times (\vec{B}_{13} + \vec{B}_{23}) &= \vec{0}\end{aligned}$$

geschrieben werden, oder wegen Satz 6 und der Beziehungen  $\vec{B}_{13} \times \vec{B}_{11} = \vec{B}_{31} \times \vec{B}_{33} = \vec{0}$  auch

$$\vec{B}_{13} \times \vec{R}^{(1)} = \vec{0}$$

$$\vec{B}_{31} \times \vec{R}^{(3)} = \vec{0}.$$

Die Verbindungslinien zwischen Massenmittelpunkt und Gelenkpunkt beider Außenkörper müssen also zum Massenmittelpunkt des gesamten Systems weisen, wie das in Abb. 19 gezeigt ist.

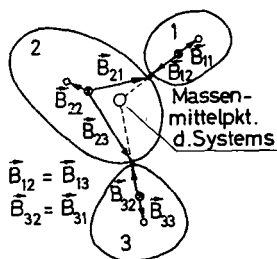


Abb. 19

### 3.2. Systeme, in denen einige oder alle Gelenkpunkte mit den Massenmittelpunkten der Körper zusammenfallen

Fällt der Gelenkpunkt  $a$  auf dem Körper  $i$  mit dessen Massenmittelpunkt zusammen, dann sind die Vektoren  $\vec{B}_{ij}$  gleich Null für alle Körper  $j$ , die mit Körper  $i$  über das Gelenk  $a$  verbunden sind. Folglich sind auch alle Untermatrizen  $A_{ij} = M B_{ij} B_{ji}^T$  der Matrix  $A$  gleich Null, die diese Nullvektoren  $\vec{B}_{ij}$  enthalten. Insbesondere gilt:

Enthält ein System von  $n$  Körpern  $r \leq n$  Körper, deren sämtliche Gelenkpunkte mit den Massenmittelpunkten der entsprechenden Körper zusammenfallen, dann hat jeder der  $r$  ausgezeichneten Körper genau die Gleichgewichtslagen, die er als einzelner Körper hätte. Die Gleichgewichtslagen der übrigen  $n - r$  Körper sind von den Massen der  $r$  ausgezeichneten Körper abhängig.

Beweis: Die Körper werden derart numeriert, daß die ausgezeichneten Körper die Indizes  $1, \dots, r$  tragen. Dann gilt nach dem anfangs Gesagten  $B_{ij} = 0$  für  $i = 1, \dots, r$ ;  $j = 1, \dots, n$ . Außerdem ist wegen Gl. (1.2.6–9), (1.2.6–6) und Satz 7  $K^{(i)} = I^{(i)}$  für  $i = 1, \dots, r$ . Die Matrix  $A$  hat also die in Abb. 20 gezeigte Struktur. Die Gleichgewichtsbedingungen für die  $r$  ausgezeichneten Körper sind entkoppelt und enthalten jeweils nur die körpereigenen Parameter  $I^{(i)}$ . Dagegen sind in den Koeffizienten der restlichen  $3(n - r)$  Gleichgewichtsbedingungen die Massen der Körper  $1, \dots, r$  enthalten. Ende des Beweises.

Ein besonders einfacher Fall liegt vor, wenn  $r = n - 1$  oder  $r = n$  ist. Dann sind alle Untermatrizen von  $A$  außerhalb der Hauptdiagonale Null. Auf der Diagonale steht außer den  $r$  Matrizen  $I^{(i)}$  im letzten Feld die Matrix  $K^{(n)}$ , die mit  $I^{(n)}$  identisch ist, wenn  $r = n$ . Die Gleichgewichtslagen des  $n$ -ten Körpers



sind also dadurch gekennzeichnet, daß die Hauptträgheitsachsen des erweiterten Körpers mit den Achsen  $\vec{x}_{1,2,3}$  zusammenfallen.

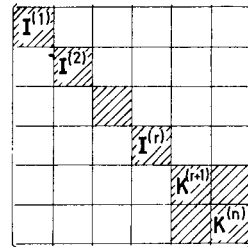


Abb. 20

In der Arbeit [16] wird das dynamische Verhalten eines Zwei-Körper-Systems dieses besonderen Typs untersucht<sup>16)</sup>. Auch die Bewegungsgleichungen (1.6-1) und (1.6-2) haben in diesem Fall einen besonders einfachen Aufbau. Sie lauten

$$\mathbf{K} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{K} \boldsymbol{\omega} = 3 \frac{\gamma}{r_0^3} \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_3 \mathbf{K} \boldsymbol{\Theta}_3 + \vec{e} \odot \mathbf{S} || \vec{Y}_a ||_{a=1, \dots, n-1}.$$

Die  $\boldsymbol{\omega}^{(i)}$  und  $\boldsymbol{\Theta}^{(i)}$  erscheinen nicht mehr in gemischten Produkten. Die Koeffizientenmatrix von  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  ist außerdem konstant.

### 3.3. Gleichgewichtslagen, in denen alle Massenmittelpunkte und alle Gelenkpunkte des Systems in der $\vec{x}_1\text{-}\vec{x}_2$ -Ebene liegen

Eine besondere Gruppe von Gleichgewichtskonfigurationen ist dadurch gekennzeichnet, daß alle Massenmittelpunkte und Gelenkpunkte des Systems in der  $\vec{x}_1\text{-}\vec{x}_2$ -Ebene liegen.

Die Existenz derartiger Lösungen setzt zunächst voraus, daß auf jedem Körper der Massenmittelpunkt und alle Gelenkpunkte in einer Ebene liegen. In dieser Ebene liegt dann auch das Baryzentrum des Körpers. Diese Bedingung reicht jedoch nicht aus.

Da alle Gelenkpunkte und Baryzentren in der  $\vec{x}_1\text{-}\vec{x}_2$ -Ebene liegen, sind die Komponenten  $B_{ij3}^*$  aller Vektoren  $\vec{B}_{ij}$  in Richtung von  $\vec{x}_3$  gleich Null. Folglich ist wegen Gl. (2.4-4)

$$K_{13}^{(i)*} = K_{23}^{(i)*} = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Gleichgewichtslagen der betrachteten Art sind also auch dadurch gekennzeichnet, daß eine Hauptträgheitsachse aller erweiterten Körper parallel zur  $\vec{x}_3$ -Achse liegt. Wegen

$$K_{13}^{(i)*} = I_{13}^{(i)*} + \sum_{k=1}^n m^{(k)} B_{ik1}^* B_{ik3}^* = I_{13}^{(i)*}$$

<sup>16)</sup> Vgl. Fußnote 2 auf S. 200.

$$K_{23}^{(i)*} = I_{23}^{(i)*} + \sum_{k=1}^n m^{(k)} B_{ik2}^* B_{ik3}^* = I_{23}^{(i)*}$$

muß auch jeder einzelne (nicht erweiterte) Körper eine Hauptträgheitsachse parallel zu  $\vec{x}_3$  ausrichten. Es genügt daher nicht, daß auf jedem Körper der Massenmittelpunkt und alle Gelenkpunkte in einer Ebene liegen. Diese Ebene muß außerdem senkrecht zu einer Hauptträgheitsachse stehen. Wir setzen voraus, daß diese Bedingungen erfüllt sind.

Zur Kennzeichnung der Lage jedes Körpers reicht nun die Angabe eines Winkels  $\varphi^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) zwischen der  $\vec{x}_1$ -Achse und der körperfesten Achse  $\vec{e}_1^{(i)}$  aus, wenn man die Achsen  $\vec{e}_1^{(i)}$  und  $\vec{e}_2^{(i)}$  in die ausgezeichneten Körper-ebenen legt (s. Abb. 21).

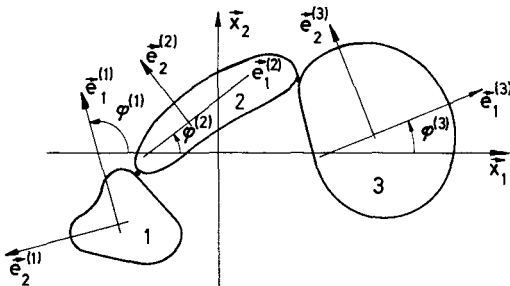


Abb. 21

Die Transformationsmatrizen nehmen damit die Gestalt an

$$\Theta^{(i)} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{(i)}$$

und die Untermatrizen von  $A$  lauten

$$A_{ij} = \begin{cases} \begin{bmatrix} K_{11} - K_{12} & 0 \\ -K_{12} & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} \end{bmatrix}^{(i)} & \text{für } i = j \\ \begin{bmatrix} A_{ij11} & A_{ij12} & 0 \\ A_{ij21} & A_{ij22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen — etwa die Gln. (2.4–2) — reduzieren sich damit zu

$$\begin{aligned} & (K_{22}^{(i)} - K_{11}^{(i)}) \sin \varphi^{(i)} \cos \varphi^{(i)} + K_{12}^{(i)} (\cos^2 \varphi^{(i)} - \sin^2 \varphi^{(i)}) - \\ & - \cos \varphi^{(i)} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (A_{ij11} \sin \varphi^{(j)} + A_{ij12} \cos \varphi^{(j)}) + \end{aligned}$$

$$+ \sin \varphi^{(i)} \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n (A_{ij_{21}} \sin \varphi^{(j)} + A_{ij_{22}} \cos \varphi^{(j)}) = 0 ; \quad i = 1, \dots, n \quad (3.3-1)$$

(zwei der Gln. (2.4-2) sind identisch erfüllt).

Die Wahl der Hauptträgheitsachsen als Koordinatenachsen bringt das Glied mit  $K_{12}^{(i)}$  zum Verschwinden. Auch dann sind die Gleichungen aber nicht in geschlossener Form lösbar. In Kapitel (3.6) werden numerische Ergebnisse für ein konkretes Beispiel mitgeteilt.

Im folgenden sollen einige bemerkenswerte Eigenschaften einer besonderen Klasse von Systemen diskutiert werden. Wir betrachten eine Kette von Körpern (s. Abb. 22) mit folgenden Eigenschaften: Auf jedem Körper bilden die Gelenkpunkte und der Massenmittelpunkt (und damit auch das Baryzentrum) eine Gerade, und diese Gerade ist Hauptträgheitsachse des Körpers (und damit auch des erweiterten Körpers). Offensichtlich erfüllen derartige Systeme alle eingangs aufgestellten Bedingungen.

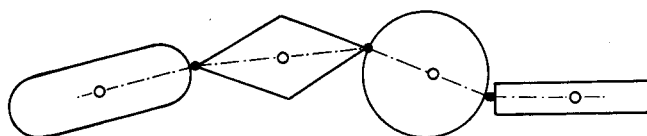


Abb. 22

Wählt man die zentralen Hauptträgheitsachsen der erweiterten Körper als Koordinatenachsen, insbesondere die ausgezeichneten Körperachsen als Achsen  $\vec{e}_1^{(i)}$ , dann ist  $K_{12}^{(i)} = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) und  $A_{ij_{12}} = A_{ij_{21}} = A_{ij_{22}} = 0$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ;  $i \neq j$ ), so daß die Gln. (3.3-1) die Form annehmen

$$\cos \varphi^{(i)} [(K_{11}^{(i)} - K_{22}^{(i)}) \sin \varphi^{(i)} + \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n A_{ij_{11}} \sin \varphi^{(j)}] = 0 ; \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.3-2)$$

Aus diesen  $n$  Gleichungen lassen sich  $2^n$  verschiedene Systeme von je  $n$  linearen Gleichungen in den  $\cos \varphi^{(i)}$  bzw.  $\sin \varphi^{(i)}$  bilden, die zusammengefaßt werden können in der Form

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi^{(i)} &= 0 & i &= 1, \dots, r \\ (K_{11}^{(i)} - K_{22}^{(i)}) \sin \varphi^{(i)} &+ \end{aligned} \right\} \quad (3.3-3)$$

$$\left. \begin{aligned} + \sum_{\substack{j=r+1 \\ \neq i}}^n A_{ij_{11}} \sin \varphi^{(j)} &= \sum_{j=1}^r (\pm A_{ij_{11}}) ; & i &= r+1, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (3.3-4)$$

Im Fall  $r = n$  sind alle Winkel  $\varphi^{(i)}$  gleich  $+90^\circ$  oder  $-90^\circ$ , die ausgezeichneten Achsen aller Körper liegen also parallel zu  $\vec{x}_2$ . Das System muß allerdings nicht die in Abb. 23 links am Drei-Körper-System demonstrierte gestreckte Lage haben. Es kann auch andere Stellungen einnehmen, von denen zwei ebenfalls in Abb. 23 dargestellt sind.

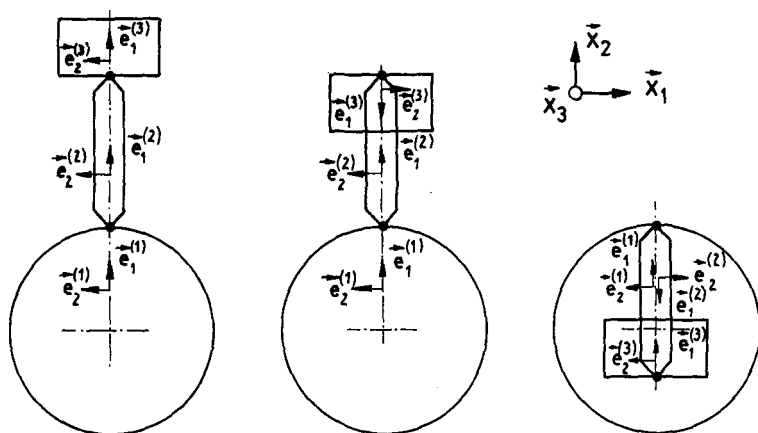


Abb. 23

Im Fall  $r = 0$  liegt ein homogenes, lineares Gleichungssystem vor, das zunächst die trivialen Lösungen  $\varphi^{(i)} = 0^\circ$  oder  $180^\circ$  ( $i = 1, \dots, n$ ) besitzt. Die zugehörigen Gleichgewichtslagen ergeben sich aus den vorher diskutierten und in Abb. 23 dargestellten durch eine Drehung um  $90^\circ$ . Das sind jedoch u. U. noch nicht alle Lösungen. Es kann der Fall eintreten, daß die wegen  $A_{ij11} = A_{ji11}$  symmetrische Koeffizientenmatrix

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} - K_{22}^{(1)} & A_{1211} & A_{1311} & \vdots & K_{11}^{(n)} - K_{22}^{(n)} \\ A_{2111} & K_{11}^{(2)} - K_{22}^{(2)} & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{3111} & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$

einen Rangabfall hat. Je nach seiner Größe sind dann einige Winkel in gewissen Grenzen frei wählbar<sup>17)</sup>. Die übrigen ergeben sich aus dem resultierenden inhomogenen Gleichungssystem. Der Fall kann schon beim Zwei-Körper-System eintreten. Die Bedingungen dafür wollen wir etwas näher betrachten.

Die Gleichungen für  $\varphi^{(1)}$  und  $\varphi^{(2)}$  lauten

$$\begin{aligned} (K_{11}^{(1)} - K_{22}^{(1)}) \sin \varphi^{(1)} + M B_{12_1} B_{21_1} \sin \varphi^{(2)} &= 0 \\ M B_{12_1} B_{21_1} \sin \varphi^{(1)} + (K_{11}^{(2)} - K_{22}^{(2)}) \sin \varphi^{(2)} &= 0. \end{aligned} \quad (3.3-5)$$

Der Rangabfall kann höchstens eins sein. Er tritt ein, wenn

$$(K_{11}^{(1)} - K_{22}^{(1)}) (K_{11}^{(2)} - K_{22}^{(2)}) - M^2 B_{12_1}^2 B_{21_1}^2 = 0.$$

Die Größen in dieser Gleichung sollen ausgedrückt werden durch Parameter der Einzelkörper.

<sup>17)</sup> Die Grenzen sind dadurch gesetzt, daß für alle  $i = 1, \dots, n$   $|\sin \varphi^{(i)}| \leq 1$  sein muß.

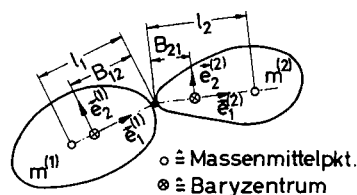


Abb. 24

Mit den Bezeichnungen von Abb. 24 ist

$$\begin{aligned} K_{11}^{(1)} &= I_{11}^{(1)} \\ K_{22}^{(1)} &= I_{22}^{(1)} + \frac{m^{(1)} m^{(2)}}{M} l_1^2 \\ B_{12_1} &= \frac{m^{(1)}}{M} l_1 \\ K_{11}^{(2)} &= I_{11}^{(2)} \\ K_{22}^{(2)} &= I_{22}^{(2)} + \frac{m^{(1)} m^{(2)}}{M} l_2^2 \\ B_{21_1} &= -\frac{m^{(2)}}{M} l_2 . \end{aligned}$$

Die obige Bedingung lautet damit

$$(I_{11}^{(1)} - I_{22}^{(1)}) (I_{11}^{(2)} - I_{22}^{(2)}) - \frac{m^{(1)} m^{(2)}}{M} [(I_{11}^{(1)} - I_{22}^{(1)}) l_2^2 + (I_{11}^{(2)} - I_{22}^{(2)}) l_1^2] = 0 .$$

Wenn sie erfüllt ist, liefern die Gln. (3.3–5) für das Verhältnis der Sinus von  $\varphi^{(1)}$  und  $\varphi^{(2)}$  den (endlichen) Wert

$$\frac{\sin \varphi^{(1)}}{\sin \varphi^{(2)}} = \frac{M B_{12_1} B_{21_1}}{K_{22}^{(1)} - K_{11}^{(1)}} .$$

Je nachdem, ob dieses Verhältnis größer oder kleiner als eins ist, kann entweder  $\varphi^{(1)}$  oder  $\varphi^{(2)}$  jeden beliebigen Wert annehmen. Stets ergibt sich für den jeweils anderen Winkel ein reeller Wert.

Sind die beiden Körper insbesondere gleich und auch symmetrisch gekoppelt, ist also  $m^{(1)} = m^{(2)}$ ;  $I_{11}^{(1)} = I_{11}^{(2)} = I_{11}$ ;  $I_{22}^{(1)} = I_{22}^{(2)} = I_{22}$  und  $l_1 = l_2 = l$ , dann lautet die Bedingung für derartige Lösungen

$$\begin{aligned} (I_{11} - I_{22}) (I_{11} - I_{22} - m l^2) &= 0 \quad \text{oder} \\ (I_{11} - I_{22}) (I_{11}^{(G)} - I_{22}^{(G)}) &= 0 . \end{aligned}$$

$I_{11}^{(G)}$  und  $I_{22}^{(G)}$  sind die auf parallel zu  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  liegende, durch den Gelenkpunkt gehende Achsen bezogenen Trägheitsmomente. Das Verhältnis  $\sin \varphi^{(1)} : \sin \varphi^{(2)}$  hat den Wert  $-1$  oder  $+1$ , je nachdem, ob  $I_{11} = I_{22}$  oder  $I_{11}^{(G)} = I_{22}^{(G)}$ . Folglich ist im ersten Fall  $\varphi^{(2)} = -\varphi^{(1)}$  oder  $\varphi^{(2)} = 180^\circ + \varphi^{(1)}$  und im zweiten  $\varphi^{(2)} = \varphi^{(1)}$  oder  $\varphi^{(2)} = 180^\circ - \varphi^{(1)}$ .  $\varphi^{(1)}$  kann jeden Wert annehmen.

In den Fällen  $0 < r < n$  schließlich haben die Gln. (3.3–3) und (3.3–4) die Lösungen  $\varphi^{(i)} = \pm 90^\circ$  für  $i = 1, \dots, r$  und eindeutige Lösungen für  $\sin \varphi^{(i)}$  ( $i = r + 1, \dots, n$ ), wenn die Koeffizientendeterminante der Gln. (3.3–4) nicht verschwindet. Reelle Lösungen  $\varphi^{(i)}$  gibt es nur, wenn für alle  $i = r + 1, \dots, n$   $|\sin \varphi^{(i)}| \leq 1$  ist.

Ein Beispiel: Zwei homogene Quader<sup>18)</sup> mit den Proportionen

$$a_1 : b_1 : c_1 = 8 : 4 : 1,$$

$$a_2 : b_2 : c_2 = 6 : 3 : 1$$

sind in der Mitte ihrer kleinsten Außenflächen ( $b_1 \times c_1$  bzw.  $b_2 \times c_2$ ) gekoppelt. Abb. 25 zeigt in einem Mittelschnitt durch das System die Querschnittsflächen

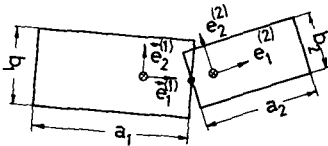


Abb. 25

$a_1 \times b_1$  und  $a_2 \times b_2$ , die mit der  $\vec{x}_1$ - $\vec{x}_2$ -Ebene zusammenfallen sollen. Für die eingezeichneten Koordinatensysteme ergeben sich die Größen  $K_{11}^{(1)}$ ,  $K_{22}^{(1)}$ ,  $K_{11}^{(2)}$ ,  $K_{22}^{(2)}$  und  $A_{12,11}$  bis auf einen allen gemeinsamen Faktor zu

$$m^{(1)} = a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 = 32; \quad m^{(2)} = a_2 \cdot b_2 \cdot c_2 = 18; \quad M = 50$$

$$K_{11}^{(1)} = \frac{m^{(1)}}{12} (b_1^2 + c_1^2) = 45,333$$

$$K_{22}^{(1)} = \frac{m^{(1)}}{12} (a_1^2 + c_1^2) + \frac{m^{(1)} m^{(2)} a_1^2}{M \cdot 4} = 357,653$$

$$K_{11}^{(2)} = \frac{m^{(2)}}{12} (b_2^2 + c_2^2) = 15,000$$

$$K_{22}^{(2)} = \frac{m^{(2)}}{12} (a_2^2 + c_2^2) + \frac{m^{(1)} m^{(2)} a_2^2}{M \cdot 4} = 159,180$$

$$A_{12,11} = - \frac{m^{(1)} m^{(2)} a_1 a_2}{M \cdot 4} = -138,240.$$

Die Gln. (3.3–3) und (3.3–4) lauten:

Für  $r = 2$ :  $\cos \varphi^{(1)} = \cos \varphi^{(2)} = 0$  mit den Lösungen

$\varphi^{(1)} =$	$+ 90^\circ$	$+ 90^\circ$	$- 90^\circ$	$- 90^\circ$
$\varphi^{(2)} =$	$+ 90^\circ$	$- 90^\circ$	$+ 90^\circ$	$- 90^\circ$

<sup>18)</sup> Die Aussage „zwei homogene Quader“ soll lediglich eine Vorstellung vermitteln. Die sich daraus ergebenden dynamischen Parameter  $\mathbf{K}$  und  $\mathbf{B}_{ij}$  lassen sich natürlich auch durch anders geformte Körper verwirklichen. Infolgedessen braucht es nicht zu stören, daß sich in der Mehrzahl der Lösungen die beiden Körper durchdringen.

Für  $r = 0$ :  $312,320 \sin \varphi^{(1)} + 138,240 \sin \varphi^{(2)} = 0$   
 $138,240 \sin \varphi^{(1)} + 144,180 \sin \varphi^{(2)} = 0$   
mit den Lösungen

$\varphi^{(1)} =$	$0^\circ$	$0^\circ$	$180^\circ$	$180^\circ$
$\varphi^{(2)} =$	$0^\circ$	$180^\circ$	$0^\circ$	$180^\circ$

Die Koeffizientendeterminante ist ungleich Null.

Für  $r = 1$  ergeben sich zwei Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} \cos \varphi^{(1)} &= 0 \\ 144,180 \sin \varphi^{(2)} + 138,240 \sin \varphi^{(1)} &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \cos \varphi^{(2)} &= 0 \\ 312,320 \sin \varphi^{(1)} + 138,240 \sin \varphi^{(2)} &= 0. \end{aligned}$$

Das erste hat die Lösungen

$\varphi^{(1)} =$	$90^\circ$	$90^\circ$	$-90^\circ$	$-90^\circ$
$\varphi^{(2)} =$	$-73,5^\circ$	$-106,5^\circ$	$73,5^\circ$	$106,5^\circ$

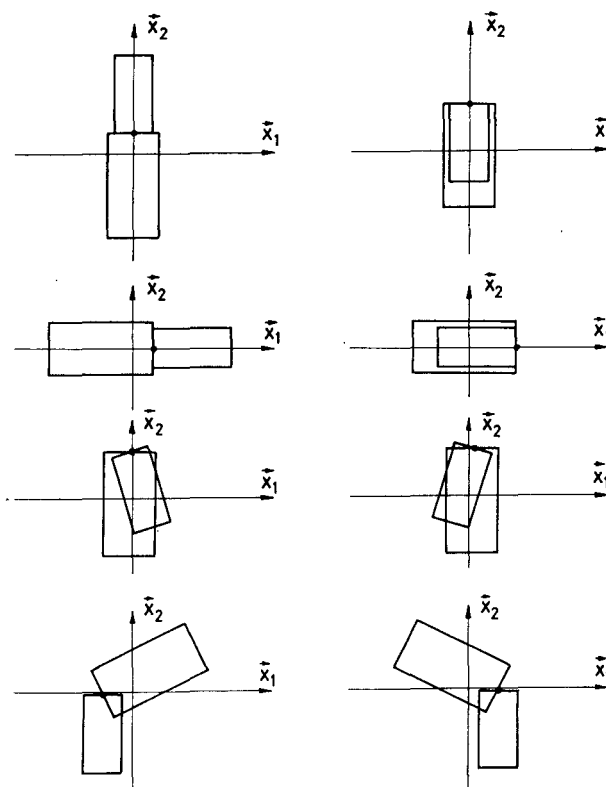


Abb. 26. In jeder Figur liegt der Ursprung des Achsensystems  $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$  im Massenmittelpunkt des Systems.

das zweite die Lösungen

$\varphi^{(1)} =$	$-26,3^\circ$	$-153,7^\circ$	$26,3^\circ$	$153,7^\circ$
$\varphi^{(2)} =$	$90^\circ$	$90^\circ$	$-90^\circ$	$-90^\circ$

Abb. 26 zeigt 8 der 16 Lösungen. Die übrigen 8 ergeben sich durch Drehung der gezeichneten Lösungen um  $180^\circ$ .

Aus Gl. (2.2-1) folgt, daß in dem betrachteten Beispiel, wie bei allen Lösungen der Gln. (3.3-3) und (3.3-4), die Gelenkreaktionen parallel zur Achse  $\vec{x}_2$  wirken.

### 3.4. Gleichgewichtslagen, in denen alle Massenmittelpunkte und alle Gelenkpunkte des Systems in der $\vec{x}_1$ - $\vec{x}_3$ -Ebene liegen

Im Fall von Gleichgewichtslagen in der  $\vec{x}_1$ - $\vec{x}_2$ -Ebene<sup>19)</sup> waren die zweite und dritte der Gln. (2.4-4) identisch erfüllt, wenn eine Hauptträgheitsachse aller Körper parallel zu  $\vec{x}_3$  ausgerichtet war (und nur dadurch waren sie überhaupt zu erfüllen). In gleicher Weise sind im Fall von Gleichgewichtslagen in der  $\vec{x}_1$ - $\vec{x}_3$ -Ebene die erste und dritte der Gln. (2.4-4) identisch erfüllt (und nur dann erfüllt), wenn eine Hauptträgheitsachse aller Körper parallel zu  $\vec{x}_2$  ausgerichtet ist.

Einmal gilt es also, die erste Gleichung durch geeignete Anordnung der Körper zu erfüllen, das andere Mal die zweite Gleichung. Aus der Tatsache, daß diese beiden Gleichungen durch Vertauschung der Indizes 2 und 3 ineinander übergehen, folgt der Satz:

Die Gleichgewichtslagen eines Systems in der  $\vec{x}_1$ - $\vec{x}_3$ -Ebene ergeben sich aus den Gleichgewichtslagen in der  $\vec{x}_1$ - $\vec{x}_2$ -Ebene durch eine Drehung des gesamten Systems um  $90^\circ$  um die Achse  $\vec{x}_1$ . Dieser Satz gilt auch umgekehrt.

### 3.5. Gleichgewichtslagen, in denen alle Massenmittelpunkte und alle Gelenkpunkte des Systems in der $\vec{x}_2$ - $\vec{x}_3$ -Ebene liegen

Wie bisher muß eine Hauptträgheitsachse aller Körper senkrecht zur betrachteten Ebene stehen.

Bezeichnet man analog zu Voraufgegangenem die körperfesten Koordinaten-

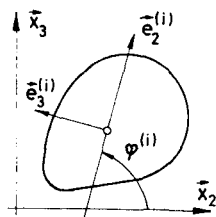


Abb. 27

<sup>19)</sup> Diese einfache Ausdrucksweise soll im folgenden stellvertretend für den Satz stehen: „Gleichgewichtslagen, in denen alle Massenmittelpunkte und Gelenkpunkte des Systems in der  $\vec{x}_1$ - $\vec{x}_2$ -Ebene liegen“.



achsen in der Ebene  $\vec{x}_2 - \vec{x}_3$  mit  $\vec{e}_2^{(i)}$  und  $\vec{e}_3^{(i)}$  und definiert man die Lage des  $i$ -ten Körpers durch den Winkel  $\varphi^{(i)}$  zwischen den Achsen  $\vec{x}_2$  und  $\vec{e}_2^{(i)}$  (s. Abb. 27), dann ergeben sich aus den Gln. (2.4–2) die Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned}
 & 4 (K_{22}^{(i)} - K_{33}^{(i)}) \sin \varphi^{(i)} \cos \varphi^{(i)} + 4 K_{23}^{(i)} (\sin^2 \varphi^{(i)} - \cos^2 \varphi^{(i)}) + \\
 & + \sin \varphi^{(i)} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n [(A_{ij_{32}} - 3 A_{ij_{33}}) \cos \varphi^{(j)} - (A_{ij_{23}} + 3 A_{ij_{33}}) \sin \varphi^{(j)}] + \\
 & + \cos \varphi^{(i)} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n [(3 A_{ij_{22}} - A_{ij_{33}}) \sin \varphi^{(j)} + (3 A_{ij_{23}} + A_{ij_{32}}) \cos \varphi^{(j)}] = 0 ; \\
 & i = 1, \dots, n. \quad (3.5-1)
 \end{aligned}$$

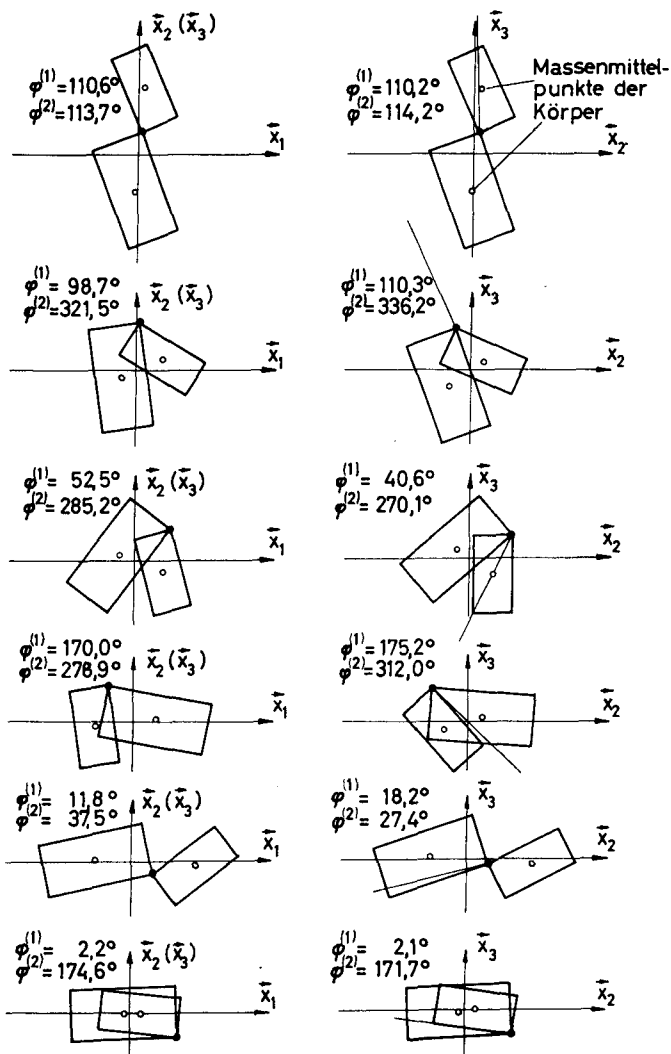


Abb. 28

Im Gegensatz zu den Gln. (3.3–1) lassen sich diese für keine spezielle Klasse von Systemen in die Form linearer Gleichungen überführen.

### 3.6. Ein numerisches Beispiel

In Abb. 28 sind die auf einem Digitalrechner ermittelten Ergebnisse für ein konkretes Beispiel zusammengestellt. Es wurde ein Zwei-Körper-System gewählt, das aus zwei homogenen Quadern<sup>20)</sup> besteht. Die Quader haben, wie in dem Beispiel in Kapitel (3.3), die Proportionen  $a_1 : b_1 : c_1 = 8 : 4 : 1$  und  $a_2 : b_2 : c_2 = 6 : 3 : 1$ . Diesmal sind sie jedoch in der Mitte ihrer kürzesten Kanten gekoppelt und die durch  $\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = 0$  gekennzeichnete Lage hat in allen drei betrachteten Ebenen das Aussehen von Abb. 29.

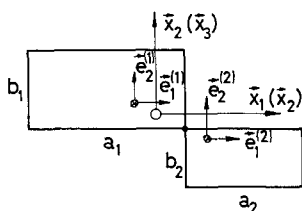


Abb. 29

Links in Abb. 28 sind die Gleichgewichtslagen in der  $\vec{x}_1\text{--}\vec{x}_2$ -Ebene bzw.  $\vec{x}_1\text{--}\vec{x}_3$ -Ebene dargestellt, rechts die in der  $\vec{x}_2\text{--}\vec{x}_3$ -Ebene. Die Gleichungssysteme (3.3–1) und (3.5–1) haben je 12 reelle Lösungen. Jeweils 6 sind wiedergegeben. Die übrigen ergeben sich durch Drehung der angegebenen Lagen um  $180^\circ$  in der jeweils betrachteten Ebene. Die Koordinatensysteme sind so eingezeichnet, daß der Ursprung jeweils im Massenmittelpunkt des gesamten Systems liegt.

Bei den Gleichgewichtslagen in der  $\vec{x}_1\text{--}\vec{x}_2$ -Ebene bzw. in der  $\vec{x}_1\text{--}\vec{x}_3$ -Ebene sind die Gelenkreaktionen Gl. (2.2–1) zufolge parallel zu  $\vec{x}_2$  bzw.  $\vec{x}_3$  gerichtet. Bei den Gleichgewichtslagen in der  $\vec{x}_2\text{--}\vec{x}_3$ -Ebene ist der Zusammenhang nicht so einfach. In Abb. 28 rechts geben dünne, von den Gelenkpunkten ausgehende Linien die Richtung der am *größeren Körper* angreifenden Gelenkreaktion an. Die Größe dieser Kräfte (zu berechnen aus Gl. (2.2–1)) variiert zwischen den einzelnen Lösungen so stark, daß ihre Darstellung durch unterschiedliche Pfeillängen nicht möglich ist.

### 3.7. Gleichgewichtslagen, in denen alle Massenmittelpunkte und Gelenkpunkte des Systems in einer Geraden liegen

Gleichgewichtslagen, in denen alle Massenmittelpunkte und alle Gelenkpunkte des Systems in einer Geraden liegen, können nur solche Systeme besitzen, bei denen alle Gelenkpunkte und der Massenmittelpunkt jedes einzelnen Körpers in einer Geraden angeordnet sind. In dieser Geraden — sie sei im folgenden die ausgezeichnete Achse des Körpers genannt — liegen dann auch das Baryzentrum und alle Vektoren  $\vec{B}_{ij}$  dieses Körpers. Außerdem müssen die Körper so geformt und gekoppelt sein, daß die parallele Ausrichtung der ausgezeich-

<sup>20)</sup> Vgl. Fußnote 18.

neten Achsen aller Körper möglich ist. Im einfachsten Fall wird ein System dieser Art eine verzweigungslose Kette von Körpern sein. Es sind aber auch Systeme denkbar wie z. B. das in Abb. 30 dargestellte.

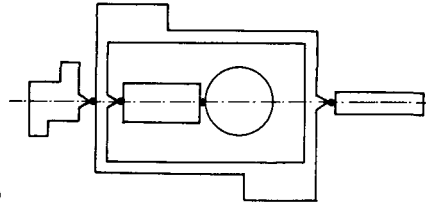


Abb. 30

Die genannten Bedingungen seien erfüllt. Die betrachteten Stellungen des Systems zeichnen sich durch Parallelität aller Vektoren  $\vec{B}_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) aus. Folglich ist

$$B_{ij_2}^* B_{ji_3}^* = B_{ij_3}^* B_{ji_2}^* ; \quad i, j = 1, \dots, n .$$

Die Gleichgewichtsbedingungen (2.4-3) nehmen damit eine symmetrische Form an

$$K_{\alpha\beta}^{(i)*} = M \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n B_{ij\alpha}^* B_{ji\beta}^* ; \quad i = 1, \dots, n ; \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 3 ; \quad \alpha \neq \beta . \quad (3.7-1)$$

Die Gerade im Raum, in der sich in einer Gleichgewichtslage alle Vektoren  $\vec{B}_{ij}$  befinden, ist bestimmt durch einen Einheitsvektor  $\vec{v}$ . Seine Komponenten-darstellung im System  $\vec{x}_{1,2,3}$  sei

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} .$$

Durch die Gleichungen

$$\vec{B}_{ij} = b_{ij} \vec{v}$$

oder in Matrizenform

$$\mathbf{B}_{ij} = b_{ij} \mathbf{v}$$

werden algebraische Größen  $b_{ij}$  eingeführt, die die Vektoren  $\vec{B}_{ij}$  nach Größe und Richtung kennzeichnen. Gl. (3.7-1) lautet damit

$$K_{\alpha\beta}^{(i)*} = v_\alpha v_\beta M \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n b_{ij} b_{ji} ; \quad i = 1, \dots, n ; \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 3 ; \quad \alpha \neq \beta . \quad (3.7-2)$$

Wir wählen nun körperfeste Koordinatensysteme derart, daß die Achsen  $\vec{e}_1$  aller Körper mit  $\vec{v}$  identisch sind, wenn das System seine Gleichgewichtslage einnimmt. Die Achsen  $\vec{e}_2$  und  $\vec{e}_3$  können in beliebiger Weise festgelegt werden. Dann ist für alle  $i, j = 1, \dots, n$

$$\mathbf{B}_{ij} = \begin{bmatrix} b_{ij} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Die außerhalb der Hauptdiagonale von  $A$  stehenden Untermatrizen haben die einfache Form

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} M & b_{ij} & b_{ji} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{matrix} i, j = 1, \dots, n \\ i \neq j \end{matrix}$$

und die Transformationsmatrizen  $\Theta^{(i)}$  lauten

$$\Theta^{(i)} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ \Theta_{21}^{(i)} & \Theta_{22}^{(i)} & \Theta_{23}^{(i)} \\ \Theta_{31}^{(i)} & \Theta_{32}^{(i)} & \Theta_{33}^{(i)} \end{bmatrix}; \quad i = 1, \dots, n.$$

Es ist leicht zu sehen, daß die besondere Form von  $A_{ij}$  ( $i \neq j$ ) und  $\Theta^{(i)}$  gestattet, die Gleichgewichtsbedingung (2.3-1) zu ersetzen durch die  $n$  Matrizen-  
gleichungen

$$\bar{\Theta}_2^{(i)} \bar{K}^{(i)} \Theta_2^{(i)} = 3 \bar{\Theta}_3^{(i)} \bar{K}^{(i)} \Theta_3^{(i)} \quad (3.7-3)$$

mit den  $(3 \times 3)$ -Matrizen

$$\bar{K}^{(i)} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(i)} + M \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n b_{ij} b_{ji} & -K_{12}^{(i)} & -K_{13}^{(i)} \\ -K_{12}^{(i)} & K_{22}^{(i)} & -K_{23}^{(i)} \\ -K_{13}^{(i)} & -K_{23}^{(i)} & K_{33}^{(i)} \end{bmatrix}; \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.7-4)$$

Sie können aufgefaßt werden als Trägheitsmatrizen. Da ihre Elemente aber u. U. die für Trägheitsmomente gültigen Ungleichungen verletzen, braucht es keine reellen Körper zu geben, deren Trägheitsmatrix  $\bar{K}^{(i)}$  ist. Wir werden von den fiktiven Körpern sprechen.

Diese Aspekte sind für das kommende jedoch unwichtig. Wesentlich ist, daß  $\bar{K}^{(i)}$  reell symmetrisch ist und infolgedessen zueinander orthogonale Eigenvektoren besitzt. Diese Eigenvektoren fallen nicht mit den Hauptachsen des erweiterten Körpers, den Eigenvektoren von  $K^{(i)}$ , zusammen.

Durch den Übergang von Gl. (2.3-1) auf Gl. (3.7-3) ist das  $n$ -Körper-System mathematisch entkoppelt, in  $n$  einzelne fiktive Körper aufgelöst worden. Gleichgewicht erfordert (s. Kapitel (3.1)), daß die Hauptachsen aller fiktiven Körper parallel zu den Achsen  $\vec{x}_{1,2,3}$  liegen.

Da die Körper in Wirklichkeit gar nicht entkoppelt sind, ergibt sich folgende Aussage:

Gleichgewichtslagen der betrachteten Art existieren nur dann, wenn sich die Hauptachsensysteme aller fiktiven Körper unter Erhaltung der Parallelität der ausgezeichneten Achsen aller Körper, also durch Drehungen um diese Achsen parallel zueinander richten lassen. Ist diese Bedingung erfüllt, dann ergibt sich die Lage des Systems im Koordinatensystem  $\vec{x}_{1,2,3}$  aus der Forderung, daß die genannten Hauptachsensysteme auch parallel zu den Achsen  $\vec{x}_{1,2,3}$  liegen müssen.

#### 4. Die Stabilität der Gleichgewichtslagen

Für den einzelnen starren Körper hat *Beletzkij* [9] mit Hilfe der Ljapunovschen Theorie Kriterien für die Stabilität der Gleichgewichtslagen angegeben. Für den allgemeinen Fall eines Systems von  $n$  Körpern erscheint die Suche nach vergleichbaren Kriterien ein aussichtsloses Unternehmen. Wir werden uns im folgenden auf die Untersuchung der Stabilität der Bewegungen bei kleinen Störungen aus der Ruhelage beschränken.

##### 4.1. Die Linearisierung der Bewegungsgleichungen für Systeme ohne Gelenkmomente

Die Bewegungsgleichungen für ein System ohne Gelenkmomente auf kreisförmiger Umlaufbahn ergeben sich aus den Gln. (1.6–1) und (2.1–1) zu

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{K} + \Psi) \dot{\omega} + \tilde{\omega} \mathbf{K} \omega - M \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \Theta^{(i)} \Theta^{(j)\top} \tilde{\omega}^{(j)} \tilde{\omega}^{(j)} \mathbf{B}_{ji} \right\|_{t=1, \dots, n} &= \\
 = \omega_0^2 \left[ 3 \tilde{\Theta}_3 \mathbf{K} \Theta_3 + M \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{\mathbf{B}}_{ij} (\Theta^{(i)} \Theta^{(j)\top} - 3 \Theta_3^{(i)} \Theta_3^{(j)\top}) \mathbf{B}_{ji} \right\|_{t=1, \dots, n} \right] &
 \end{aligned}
 \quad (4.1-1)$$

mit den Untermatrizen

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{ij} &= \mathbf{K}^{(i)} \delta_{ij}, \\
 \Psi_{ij} &= M \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \Theta^{(i)} \Theta^{(j)\top} \tilde{\mathbf{B}}_{ji} (1 - \delta_{ij})
 \end{aligned}$$

Als körperfeste Koordinatensysteme wählen wir wieder diejenigen, die in der betrachteten Gleichgewichtslage zu  $\Theta^{(i)*} = \mathbf{E}_3$  führen. Als Störungen des  $i$ -ten Körpers aus seiner Gleichgewichtslage betrachten wir kleine Drehungen  $\varphi_1^{(i)}, \varphi_2^{(i)}, \varphi_3^{(i)}$  um die Achsen  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ . In einer aus der Gleichgewichtslage abweichenden Lage ist dann<sup>21)</sup>

$$\Theta^{(i)} = \begin{bmatrix} 1 & \varphi_3 & -\varphi_2 \\ -\varphi_3 & 1 & \varphi_1 \\ \varphi_2 & -\varphi_1 & 1 \end{bmatrix}^{(i)} = \Theta^{(i)*} + \mathbf{Z}^{(i)} + \dots \quad (4.1-2)$$

Absichtlich wird von  $\Theta^{(i)*}$  statt von  $\mathbf{E}_3$  und von  $\mathbf{Z}^{(i)}$  statt von  $-\tilde{\varphi}^{(i)}$  gesprochen, um im folgenden Mißverständnisse auszuschließen (wir nehmen dabei den Schönheitsfehler in Kauf, daß  $\Theta^{(i)*}$  nicht von  $i$  abhängt).

Nach denselben Vorschriften, nach denen wir früher aus den  $\Theta^{(i)}$  Größen  $\Theta_2^{(i)}, \Theta_3^{(i)}, \tilde{\Theta}_2^{(i)}, \tilde{\Theta}_3^{(i)}$  usw. gebildet haben, können wir aus den  $\mathbf{Z}^{(i)}$  Größen  $\mathbf{Z}_2^{(i)}, \mathbf{Z}_3^{(i)}, \tilde{\mathbf{Z}}_2^{(i)}, \tilde{\mathbf{Z}}_3^{(i)}$  usw. entwickeln. Sie brauchen nicht einzeln definiert zu werden. Als Beispiel sei lediglich angeführt

$$\tilde{\mathbf{Z}}^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & \varphi_1 & 0 \\ -\varphi_1 & 0 & -\varphi_3 \\ 0 & \varphi_3 & 0 \end{bmatrix}^{(i)}.$$

<sup>21)</sup> In dieser wie in allen folgenden Gleichungen werden die vernachlässigten Glieder höherer als erster Ordnung in  $\varphi, \phi, \tilde{\varphi}$  durch Punkte angedeutet.

Weiterhin führen wir ein

$$\boldsymbol{\varphi}^{(i)} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}^{(i)}; \quad \dot{\boldsymbol{\varphi}}^{(i)} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix}^{(i)}; \quad \ddot{\boldsymbol{\varphi}}^{(i)} = \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \end{bmatrix}^{(i)}.$$

Aus den  $\boldsymbol{\varphi}^{(i)}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\varphi}}^{(i)}$  und  $\ddot{\boldsymbol{\varphi}}^{(i)}$  bauen sich 3  $n$ -zeilige Spaltenmatrizen  $\boldsymbol{\varphi}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ ,  $\ddot{\boldsymbol{\varphi}}$  auf. Damit ist

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}^{(i)} &= \omega_0 \boldsymbol{\Theta}_2^{(i)} = \omega_0 \boldsymbol{\Theta}_2^{(i)*} + \omega_0 \mathbf{Z}_2^{(i)} + \dot{\boldsymbol{\varphi}}^{(i)} + \dots \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}^{(i)} &= \omega_0 \dot{\mathbf{Z}}_2^{(i)} + \ddot{\boldsymbol{\varphi}}^{(i)} + \dots \\ \boldsymbol{\omega} &= \omega_0 \boldsymbol{\Theta}_2^* + \omega_0 \mathbf{Z}_2 + \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \dots \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \omega_0 \dot{\mathbf{Z}}_2 + \ddot{\boldsymbol{\varphi}}. \end{aligned}$$

Die Linearisierung der einzelnen Glieder der Bewegungsgleichungen (4.1–1) ist ein einfacher Prozeß, der jedoch viel Schreibaufwand erfordert. Daher werden nur einige Zwischenergebnisse mitgeteilt. Man erhält

$$\mathbf{K} \dot{\boldsymbol{\omega}} = \omega_0 \mathbf{K}^* \dot{\mathbf{Z}}_2 + \mathbf{K}^* \ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \dots$$

$$\boldsymbol{\Psi} \dot{\boldsymbol{\omega}} = \omega_0 \boldsymbol{\Psi}^* \dot{\mathbf{Z}}_2 + \boldsymbol{\Psi}^* \ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \dots$$

mit einer  $(3n \times 3n)$ -Matrix  $\boldsymbol{\Psi}^*$ , deren Untermatrizen lauten

$$\boldsymbol{\Psi}_{ij}^* = M \tilde{\mathbf{B}}_{ij}^* \tilde{\mathbf{B}}_{ji}^* (1 - \delta_{ij}),$$

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{K} \boldsymbol{\omega} &= \omega_0^2 \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_2^* \mathbf{K}^* \boldsymbol{\Theta}_2^* + \omega_0^2 [\tilde{\boldsymbol{\Theta}}_2^* \mathbf{K}^* \mathbf{Z}_2 + \tilde{\mathbf{Z}}_2 \mathbf{K}^* \boldsymbol{\Theta}_2^*] + \\ &+ \omega_0 [\tilde{\boldsymbol{\Theta}}_2^* \mathbf{K}^* \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \mathbf{K}^* \boldsymbol{\Theta}_2^*] + \dots \end{aligned}$$

Das letzte Glied auf der linken Seite der Bewegungsgleichungen kann mit Hilfe von Gl. (1.4–19) umgeformt werden

$$\begin{aligned} M \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \boldsymbol{\Theta}^{(i)} \boldsymbol{\Theta}^{(j)\top} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(j)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(j)} \mathbf{B}_{ji} \right\|_{i=1, \dots, n} &= \\ = M \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \boldsymbol{\Theta}^{(i)} \boldsymbol{\Theta}^{(j)\top} \boldsymbol{\omega}^{(j)} \boldsymbol{\omega}^{(j)\top} \mathbf{B}_{ji} \right\|_{i=1, \dots, n} &- \\ - M \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n |\vec{\boldsymbol{\omega}}^{(j)}|^2 \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \boldsymbol{\Theta}^{(i)} \boldsymbol{\Theta}^{(j)\top} \mathbf{B}_{ji} \right\|_{i=1, \dots, n} &= \\ = M \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \boldsymbol{\Theta}^{(i)} \boldsymbol{\Theta}^{(j)\top} \boldsymbol{\omega}^{(j)} \boldsymbol{\omega}^{(j)\top} \mathbf{B}_{ji} \right\|_{i=1, \dots, n} &- \\ - \omega_0^2 M \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \boldsymbol{\Theta}^{(i)} \boldsymbol{\Theta}^{(j)\top} \mathbf{B}_{ji} \right\|_{i=1, \dots, n} &- \\ - 2 \omega_0 M \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \dot{\varphi}_2^{(j)} \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \boldsymbol{\Theta}^{(i)} \boldsymbol{\Theta}^{(j)\top} \mathbf{B}_{ji} \right\|_{i=1, \dots, n} &+ \dots \end{aligned}$$

Das zweite Glied hebt sich gegen das zweite Glied auf der rechten Seite der Gl. (4.1-1) weg. Der verbleibende Rest ist

$$\begin{aligned}
 & M \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \boldsymbol{\Theta}^{(i)} \boldsymbol{\Theta}^{(j)\top} \boldsymbol{\omega}^{(j)} \boldsymbol{\omega}^{(j)\top} \mathbf{B}_{ji} - 2\omega_0 \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \dot{\varphi}_2^{(j)} \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \boldsymbol{\Theta}^{(i)} \boldsymbol{\Theta}^{(j)\top} \mathbf{B}_{ji} \right\|_{i=1, \dots, n} = \\
 & = -\omega_0^2 \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n (\tilde{\boldsymbol{\Theta}}_2^{(i)*} \mathbf{A}_{ij}^* \boldsymbol{\Theta}_2^{(j)*} + \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_2^{(j)*} \mathbf{A}_{ij}^* \mathbf{Z}_2^{(j)} + \tilde{\mathbf{Z}}_2^{(i)} \mathbf{A}_{ij}^* \boldsymbol{\Theta}_2^{(j)*}) - \right. \\
 & \quad \left. - \omega_0 \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n (\tilde{\boldsymbol{\Theta}}_2^{(i)*} \mathbf{A}_{ij}^* \dot{\boldsymbol{\varphi}}^{(j)} + \tilde{\dot{\boldsymbol{\varphi}}}^{(j)} \mathbf{A}_{ij}^* \boldsymbol{\Theta}_2^{(j)*}) - \right. \\
 & \quad \left. - 2\omega_0 M \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \dot{\varphi}_2^{(j)} \tilde{\mathbf{B}}_{ij}^* \mathbf{B}_{ji} \right\|_{i=1, \dots, n} + \dots
 \end{aligned}$$

Die  $\mathbf{A}_{ij}^*$  sind die Untermatrizen der Matrix  $\mathbf{A}^*$  in den Gleichgewichtsbedingungen (s. Gl. (2.1-4)). Weiterhin ist

$$\tilde{\boldsymbol{\Theta}}_3 \mathbf{K} \boldsymbol{\Theta}_3 = \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_3^* \mathbf{K}^* \boldsymbol{\Theta}_3^* + \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_3^* \mathbf{K}^* \mathbf{Z}_3 + \tilde{\mathbf{Z}}_3 \mathbf{K}^* \boldsymbol{\Theta}_3^* + \dots$$

$$\begin{aligned}
 & M \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \boldsymbol{\Theta}_3^{(i)} \boldsymbol{\Theta}_3^{(j)\top} \mathbf{B}_{ji} \right\|_{i=1, \dots, n} = \\
 & = - \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n (\tilde{\boldsymbol{\Theta}}_3^{(i)*} \mathbf{A}_{ij}^* \boldsymbol{\Theta}_3^{(j)*} + \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_3^{(i)*} \mathbf{A}_{ij}^* \mathbf{Z}_3^{(j)} + \tilde{\mathbf{Z}}_3^{(i)} \mathbf{A}_{ij}^* \boldsymbol{\Theta}_3^{(j)*}) \right\|_{i=1, \dots, n} + \dots
 \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichungen (4.1-1) nehmen damit die Gestalt an

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{K}^* + \bar{\boldsymbol{\Psi}}^*) (\omega_0 \mathbf{Z}_2 + \dot{\boldsymbol{\varphi}}) + \omega_0^2 \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_2^* \mathbf{K}^* \boldsymbol{\Theta}_2^* + \omega_0^2 (\tilde{\boldsymbol{\Theta}}_2^* \mathbf{K}^* \mathbf{Z}_2 + \\
 & \quad + \tilde{\mathbf{Z}}_2 \mathbf{K}^* \boldsymbol{\Theta}_2^*) + \omega_0 (\tilde{\boldsymbol{\Theta}}_2^* \mathbf{K}^* \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \tilde{\dot{\boldsymbol{\varphi}}} \mathbf{K}^* \boldsymbol{\Theta}_2^*) + \\
 & \quad + \omega_0^2 \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n (\tilde{\boldsymbol{\Theta}}_2^{(j)*} \mathbf{A}_{ij}^* \boldsymbol{\Theta}_2^{(j)*} + \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_2^{(j)*} \mathbf{A}_{ij}^* \mathbf{Z}_2^{(j)} + \tilde{\mathbf{Z}}_2^{(i)} \mathbf{A}_{ij}^* \boldsymbol{\Theta}_2^{(j)*}) \right\|_{i=1, \dots, n} + \\
 & \quad + \omega_0 \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n (\tilde{\boldsymbol{\Theta}}_2^{(j)*} \mathbf{A}_{ij}^* \dot{\boldsymbol{\varphi}}^{(j)} + \tilde{\dot{\boldsymbol{\varphi}}}^{(j)} \mathbf{A}_{ij}^* \boldsymbol{\Theta}_2^{(j)*}) \right\|_{i=1, \dots, n} + \\
 & \quad + 2\omega_0 M \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \dot{\varphi}_2^{(j)} \tilde{\mathbf{B}}_{ij}^* \mathbf{B}_{ji} \right\|_{i=1, \dots, n} = \\
 & = 3\omega_0 (\tilde{\boldsymbol{\Theta}}_3^* \mathbf{K}^* \boldsymbol{\Theta}_3^* + \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_3^* \mathbf{K}^* \mathbf{Z}_3 + \tilde{\mathbf{Z}}_3 \mathbf{K}^* \boldsymbol{\Theta}_3^*) + \\
 & \quad + 3\omega_0^2 \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n (\tilde{\boldsymbol{\Theta}}_3^{(i)*} \mathbf{A}_{ij}^* \boldsymbol{\Theta}_3^{(j)*} + \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_3^{(i)*} \mathbf{A}_{ij}^* \mathbf{Z}_3^{(j)} + \tilde{\mathbf{Z}}_3^{(i)} \mathbf{A}_{ij}^* \boldsymbol{\Theta}_3^{(j)*}) \right\|_{i=1, \dots, n}
 \end{aligned} \tag{4.1-3}$$

Die unterstrichenen Größen heben sich gegenseitig auf, da laut Voraussetzung für die ungestörte Bewegung die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sind. Der Rest wird umgeformt zu

$$\alpha \ddot{\Phi} + \omega_0 \beta \dot{\Phi} + \omega_0^2 \gamma \Phi = 0 \quad (4.1-4)$$

mit  $(3n \times 3n)$ -Matrizen  $\alpha, \beta, \gamma$ :

Die recht langwierige Umordnung der Gl. (4.1-3) führt zu folgenden Ergebnissen für die Untermatrizen von  $\alpha, \beta, \gamma$ :

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \mathbf{K}^{(i)*} & \text{für } i = j \\ \begin{bmatrix} -A_{ij22}^* - A_{ij33}^* & A_{ij21}^* & A_{ij31}^* \\ A_{ij12}^* & -A_{ij33}^* - A_{ij11}^* & A_{ij32}^* \\ A_{ij13}^* & A_{ij23}^* & -A_{ij11}^* - A_{ij22}^* \end{bmatrix} & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (4.1-5)$$

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & -2K_{23}^* & (K_{11}^* - K_{22}^* + K_{33}^*) \\ 2K_{23}^* & 0 & -2K_{12}^* \\ -(K_{11}^* - K_{22}^* + K_{33}^*) & 2K_{12}^* & 0 \end{bmatrix}^{(i)} & \text{für } i = j \\ \begin{bmatrix} 0 & 2A_{ij23}^* & -2A_{ij22}^* \\ -2A_{ij32}^* & 2(A_{ij31}^* - A_{ij13}^*) & 2A_{ij12}^* \\ 2A_{ij22}^* & -2A_{ij21}^* & 0 \end{bmatrix} & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (4.1-6)$$

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 4(K_{22}^{(i)*} - K_{33}^{(i)*}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (A_{ij22}^* - 3A_{ij33}^*) & 3K_{12}^{(i)*} & -K_{13}^{(i)*} \\ 3K_{12}^{(i)*} & 3(-K_{33}^{(i)*} + K_{11}^{(i)*}) - 3 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n A_{ij33}^* & K_{23}^{(i)*} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n A_{ij32}^* \\ -K_{13}^{(i)*} & K_{23}^{(i)*} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n A_{ij32}^* & -K_{11}^{(i)*} + K_{22}^{(i)*} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n A_{ij22}^* \end{bmatrix} & \text{für } i = j \\ \begin{bmatrix} 3A_{ij22}^* - A_{ij33}^* & -3A_{ij21}^* & A_{ij31}^* \\ -3A_{ij12}^* & 3A_{ij11}^* & 0 \\ A_{ij13}^* & 0 & -A_{ij11}^* \end{bmatrix} & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (4.1-7)$$

$\alpha$  ist ebenso wie die Matrix  $\mathbf{K} + \Psi$  positiv definit. Auf Grund der Identität  $A_{ij\alpha\beta}^* = A_{ji\beta\alpha}^*$  sind  $\alpha$  und  $\gamma$  symmetrisch und  $\beta$  schiefsymmetrisch. Die Deviationsmomente  $K_{12}^{(i)*}$ ,  $K_{13}^{(i)*}$  und  $K_{23}^{(i)*}$  können mit Hilfe der Gl. (2.4-4) ersetzt werden durch Summen der Form  $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n A_{ij\alpha\beta}^*$ .



## 4.2. Stabilitätskriterien

Mit den Gln. (4.1–4) bis (4.1–7) läßt sich jede Lösung der Gleichgewichtsbedingungen, für die die Matrix  $\gamma$  nicht singulär ist, auf ihre Stabilität hin prüfen. Mit dem Lösungsansatz  $\varphi = \varphi_0 e^{\omega_0 \lambda t}$  ergibt sich die charakteristische Gleichung

$$\text{Det} (\lambda^2 \alpha + \lambda \beta + \gamma) = 0. \quad (4.2-1)$$

Stabilität erfordert, daß alle charakteristischen Zahlen rein imaginär sind (Eigenwerte mit negativem Realteil, d. h. asymptotisch stabile Lösungen können nicht auftreten).

Chetaev [30] hat den von Kelvin und Tait erkannten Satz bewiesen<sup>22)</sup>: Eine stabile (instabile) Gleichgewichtslage eines konservativen Systems ohne gyrokopische Momente bleibt stabil (instabil), wenn gyrokopische Momente und positiv definite Dämpfung in das System eingeführt werden. Mit anderen Worten: Die stabilisierende Wirkung, die u. U. von den gyrokopischen Momenten ausgeht, wird durch gleichzeitig vorhandene Dämpfung wieder zunichte gemacht. Die spezielle Form des Dämpfungsgesetzes und die Größe der Dämpfungsmomente sind dabei völlig gleichgültig, da alle Eigenwerte des ungedämpften Systems auf der Stabilitätsgrenze liegen.

„Positiv definite Dämpfung“ bedeutet, daß außerhalb der Gleichgewichtslage alle überhaupt denkbaren Bewegungen mit Energieverlust durch Dämpfung verbunden sind. In der Praxis wird das stets der Fall sein. Die Berücksichtigung der Dämpfung bei Stabilitätsuntersuchungen ist also unbedingt notwendig. Der Satz von Kelvin-Tait-Chetaev ermöglicht das.

Bemerkenswerterweise wird die Rechnung dadurch einfacher. In unserem Fall ist das verkürzte Gleichungssystem zu untersuchen

$$\alpha \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \gamma \varphi = 0. \quad (4.2-2)$$

Die Lösung  $\varphi = 0$  ist stabil, wenn alle Eigenwerte von  $\gamma$  positiv sind (s. [32]). Es zeigt sich, daß schon im Fall des einzelnen starren Körpers diese Forderung strenger ist als das aus Gl. (4.2–1) sich ergebende Stabilitätskriterium. Die Gleichgewichtslagen des einzelnen Körpers sind nach Kapitel (3.1) gekennzeichnet durch die Gleichung

$$\alpha = K^* = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{bmatrix}.$$

mit den Hauptträgheitsmomenten  $I_{11}$ ,  $I_{22}$ ,  $I_{33}$  in Richtung der Achsen  $\vec{x}_{1,2,3}$ . Für  $\gamma$  ergibt sich

$$\gamma = \begin{bmatrix} 4(I_{22} - I_{33}) & 0 & 0 \\ 0 & 3(I_{11} - I_{33}) & 0 \\ 0 & 0 & (I_{22} - I_{11}) \end{bmatrix}.$$

<sup>22)</sup> Siehe auch Merkin [31]. Zajac [32] hat diesen Satz durch einige zusätzliche Aussagen verschärft. Diese sind für die hier vorliegende Arbeit jedoch unwichtig.

Die Eigenwerte von  $\gamma$  sind nur dann alle positiv, wenn

$$I_{22} > I_{11} > I_{33} \quad (4.2-3)$$

ist. Die Auswertung der Gl. (4.2-1) dagegen führt zu dem Ergebnis<sup>23)</sup>, daß nicht nur dann alle charakteristischen Zahlen imaginär sind, wenn die Bedingung (4.2-3) erfüllt ist, sondern darüber hinaus auch in einem schmalen Parameterbereich, der die Bedingung nicht erfüllt. Die zu diesem Bereich gehörenden Lösungen erweisen sich also als instabil bei Dämpfung.

#### 4.3. Ein Instabilitätskriterium

Das für den einzelnen starren Körper gewonnene Stabilitätskriterium (4.2-3) ermöglicht die Formulierung eines sehr nützlichen Instabilitätskriteriums für das  $n$ -Körperproblem. Es lautet:

Eine Gleichgewichtslage eines Systems von Körpern ist instabil, wenn die zentralen Hauptträgheitsmomente  $I_{11\text{ges}}^*$ ,  $I_{22\text{ges}}^*$  und  $I_{33\text{ges}}^*$  des gesamten Systems die Ungleichung

$$I_{22\text{ges}}^* > I_{11\text{ges}}^* > I_{33\text{ges}}^*$$

verletzen. Diese Instabilität läßt sich auch durch den Einbau von Kardan-gelenken und Achsen mit Federn und Dämpfern in der in Kapitel (2.3) beschriebenen Weise nicht beheben.

Die zentralen Hauptträgheitsmomente des Systems lassen sich leicht berechnen. Der Steinersche Satz liefert die Beziehung

$$I_{\alpha\alpha\text{ges}}^* = \sum_{i=1}^n [I_{\alpha\alpha}^{(i)*} + m^{(i)} (\sum_{\gamma=1}^3 R_{\gamma}^{(i)*^2} - R_{\alpha}^{(i)*^2})]; \quad \alpha = 1, \dots, 3. \quad (4.3-1)$$

Mit den Gln. (1.2.6-6) und (1.2.6-9) und den Sätzen 6 und 7 läßt sich dieser Ausdruck weiter umformen zu

$$I_{\alpha\alpha\text{ges}}^* = \sum_{i=1}^n \left\{ I_{\alpha\alpha}^{(i)*} + m^{(i)} \left[ \sum_{\gamma=1}^3 (\sum_{k=1}^n B_{ki\gamma}^*)^2 - (\sum_{k=1}^n B_{ki\alpha}^*)^2 \right] \right\}; \quad \alpha = 1, \dots, 3 \quad (4.3-2)$$

oder

$$I_{\alpha\alpha\text{ges}}^* = \sum_{i=1}^n \left\{ K_{\alpha\alpha}^{(i)*} - \sum_{\gamma=1}^3 \sum_{k=1}^n m^{(k)} B_{ik\gamma}^{*2} + \sum_{k=1}^n m^{(k)} B_{ik\alpha}^{*2} + \left[ \sum_{\gamma=1}^3 (\sum_{k=1}^n B_{ki\gamma}^*)^2 - (\sum_{k=1}^n B_{ki\alpha}^*)^2 \right] \right\}; \quad \alpha = 1, \dots, 3. \quad (4.3-3)$$

<sup>23)</sup> Die Einzelheiten sollen hier nicht ausgeführt werden. Die Ergebnisse findet man z. B. bei Beletzkij [9].

Ebenso leicht lassen sich die zentralen Deviationsmomente  $I_{12\text{ ges}}^*$ ,  $I_{13\text{ ges}}^*$ ,  $I_{23\text{ ges}}^*$  des gesamten Systems bezogen auf die Achsen  $\vec{x}_{1,2,3}$  angeben. Sie lauten

$$I_{\alpha\beta\text{ ges}}^* = \sum_{i=1}^n [K_{\alpha\beta}^{(i)*} - \sum_{k=1}^n m^{(k)} B_{ik\alpha}^* B_{ik\beta}^* + \\ + m^{(i)} (\sum_{k=1}^n B_{ki\alpha}^*) (\sum_{k=1}^n B_{ki\beta}^*)] ; \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 3, \quad \alpha \neq \beta \quad (4.3-4)$$

Zieht man noch die Gleichgewichtsbedingungen (2.4-4) heran und beachtet, daß wegen der Symmetrie von  $A$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n B_{ik\alpha}^* B_{ki\beta}^* = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n B_{ik\beta}^* B_{ki\alpha}^*$$

ist, dann erhält man

$$I_{\alpha\beta\text{ ges}}^* = \sum_{i=1}^n [M \sum_{k=1}^n B_{ik\alpha}^* B_{ki\beta}^* - \sum_{k=1}^n m^{(k)} B_{ik\alpha}^* B_{ik\beta}^* + \\ + m^{(i)} (\sum_{k=1}^n B_{ki\alpha}^*) (\sum_{k=1}^n B_{ki\beta}^*)] ; \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 3, \quad \alpha \neq \beta \quad (4.3-5)$$

In den Gleichgewichtslagen müssen alle drei Deviationsmomente den Wert Null haben. Daraus ergibt sich eine sehr zuverlässige Kontrolle für numerische Lösungen der Gleichgewichtsbedingungen.

#### 4.4. Ein numerisches Beispiel

Wir untersuchen die Stabilität der in dem Beispiel in Kapitel (3.6) gefundenen Gleichgewichtslagen.

Die Berechnung der zentralen Hauptträgheitsmomente des Systems aus Gl. (4.3-2) führt zu dem Ergebnis, daß nur für zwei der in Abb. 28 dargestellten Gleichgewichtslagen die Ungleichung

$$I_{22\text{ ges}}^* > I_{11\text{ ges}}^* > I_{33\text{ ges}}^*$$

erfüllt ist. Es sind die beiden obersten in der linken Spalte abgebildeten Gleichgewichtslagen in der  $\vec{x}_1\text{-}\vec{x}_3$ -Ebene (d. h. in der Bahnebene).

Für diese beiden wurde Gl. (4.2-2) ausgewertet. Es zeigt sich, daß für die oberste (gestreckte) Lage alle Eigenwerte der Koeffizientenmatrix von  $\varphi$  positiv sind. Sie ist also stabil. Die andere Gleichgewichtslage hat eine Matrix mit positiven und negativen Eigenwerten. Sie ist instabil.

Sie kann aber stabilisiert werden, wenn das Gelenk zwischen den beiden Körpern durch Drehfedern versteift wird, denn bei vollständiger Fixierung der gegenseitigen Lage entsteht ein einzelner starrer Körper, der die Stabilitätsbedingungen erfüllt, wie wir wissen. Daher ist zu erwarten, daß die Stabilitäts-

grenze beim Übergang vom reibungslosen Kugelgelenk zur starren Verbindung bei einer gewissen minimalen Federsteifigkeit überschritten wird.

Wenn man gleichzeitig das Kugelgelenk durch einen anderen Mechanismus, z. B. eine Achse oder ein Kardangeln ersetzt und diesen mit Federelementen versieht, dann hängt die Mindestgröße der Federsteifigkeit auch von den kinematischen Eigenschaften des Gelenks ab. Der Fall ist denkbar, daß bei geeigneter Wahl der Richtung eine Achse ohne Feder schon genügt.

#### 4.5. Die linearisierten Bewegungsgleichungen und Stabilitätskriterien für beliebige Gelenkmechanismen, die in den Gleichgewichtslagen keine Reaktionsmomente ausüben

In diesem Kapitel werden die linearisierten Bewegungsgleichungen für Systeme ohne Gelenkmomente, Gl. (4.1–4), erweitert für den Fall, daß das System nicht nur reibungsfreie Kugelgelenke, sondern auch beliebige andere Gelenkmechanismen enthält. Es wird lediglich vorausgesetzt, daß in der betrachteten Gleichgewichtslage selbst diese Gelenke keine Reaktionsmomente verursachen. Das bedeutet, daß das System dieselbe Gleichgewichtslage besitzt, wenn man alle Gelenke unter Erhaltung der Lage der Gelenkpunkte auf den Körpern durch reibungslose Kugelgelenke ersetzt.

Wir beschränken uns auf die Behandlung von Achs- und Kardangeln mit angeschlossenen Drehfedern und Dämpfern. In einem Fall werden zwei Freiheitsgrade der relativen Drehung der gekoppelten Körper aufgehoben, im anderen ein Freiheitsgrad.

Wie bereits in Kapitel (1.6) beschrieben, teilen wir die Gelenkmomente  $\vec{Y}_a$  ein in die Gruppe der kinematisch bedingten Zwangsmomente ( $\vec{Q}_a$  genannt), die durch die Aufhebung von Freiheitsgraden hervorgerufen werden und in die Gruppe der Feder- und Dämpfermomente ( $\vec{W}_a$ ).

$$\|\vec{Y}_a\|_{a=1, \dots, n-1} = \|\vec{Q}_a\|_{a=1, \dots, n-1} + \|\vec{W}_a\|_{a=1, \dots, n-1}.$$

Die Momente der ersten Gruppe lassen sich aus den Bewegungsgleichungen eliminieren, denn jedem Zwangsmoment entspricht eine kinematische Bedingung, die den Sachverhalt der verminderten relativen Bewegungsfreiheit ausdrückt. Wenden wir uns zuerst den Feder- und Dämpfermomenten  $\vec{W}_a$  zu. Wir beginnen mit der Betrachtung eines Achsgelenkes.

Sei  $\vec{f}_a$  ein Einheitsvektor in Richtung der Achse im Gelenk  $a$ . Seien ferner  $b_a$  und  $c_a$  die Dämpfungs- und Drehfederkonstante an dieser Achse (vgl. Abb. 5). Die beiden durch das Gelenk  $a$  gekoppelten Körper mögen die Nummern  $i$  und  $k$  haben, wobei im Sinne der Definition in Kapitel (1.2.1)  $i < k$  sein soll. Abb. 31 zeigt den hier interessierenden Ausschnitt des Systemgraphen.

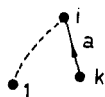


Abb. 31

Das Moment  $\vec{W}_a$  wirkt in Richtung von  $\vec{f}_a$ . Es hat den Betrag

$$W_a = \left| b_a \vec{f}_a \cdot (\vec{\varphi}^{(i)} - \vec{\varphi}^{(k)}) + c_a \vec{f}_a \cdot (\vec{\varphi}^{(i)} - \vec{\varphi}^{(k)}) \right|.$$

Diese Formel macht von dem Vektorcharakter kleiner Drehungen Gebrauch. Der Vektor  $\vec{W}_a$  ist  $\vec{W}_a = \vec{f}_a \cdot W_a$ . Das ist einzusetzen in den Ausdruck

$$\vec{e} \odot \mathbf{S} \parallel \vec{W}_a \parallel_{a=1, \dots, n-1}$$

(vgl. Gl. (1.6–2)). Wenn man die Vereinbarung der Vorzeichen in der Matrix  $\mathbf{S}$  in Kapitel (1.2.1) beachtet, muß für  $\vec{W}_a$  das positive Vorzeichen, also  $+\vec{f}_a W_a$  gewählt werden. Benutzt man als körperfeste Achsensysteme weiterhin die ausgezeichneten, die in der betrachteten Gleichgewichtslage zu  $\Theta^{(i)} = \mathbf{E}_3$  führen, dann hat der Vektor  $\vec{f}_a$  in beiden Achsensystemen  $\vec{e}^{(i)}$  und  $\vec{e}^{(k)}$  dieselbe Komponentendarstellung  $f_a$ , und  $\vec{W}_a$  läßt sich in der Form schreiben

$$\vec{W}_a = \vec{f}_a [b_a f_a^T (\dot{\varphi}^{(i)} - \dot{\varphi}^{(k)}) + c_a f_a^T (\varphi^{(i)} - \varphi^{(k)})]$$

Außerdem ist  $\vec{e}^{(i)} \odot \vec{f}_a = f_a$ . Damit läßt sich das Produkt

$$\vec{e} \odot \mathbf{S} \parallel \vec{W}_a \parallel_{a=1, \dots, n-1}$$

so formulieren

$$- \begin{array}{c} i \quad k \\ \left[ \begin{array}{cc|c} & & \\ \hline b_{ai} f_{ai}^T & b_{ak} f_{ak}^T & \left( \begin{array}{c} \varphi^{(i)} \\ \varphi^{(k)} \end{array} \right) \\ \hline b_{ki} f_{ki}^T & b_{kk} f_{kk}^T & \left( \begin{array}{c} \varphi^{(i)} \\ \varphi^{(k)} \end{array} \right) \end{array} \right] - \begin{array}{c} i \quad k \\ \left[ \begin{array}{cc|c} & & \\ \hline c_{ai} f_{ai}^T & c_{ak} f_{ak}^T & \left( \begin{array}{c} \varphi^{(i)} \\ \varphi^{(k)} \end{array} \right) \\ \hline c_{ki} f_{ki}^T & c_{kk} f_{kk}^T & \left( \begin{array}{c} \varphi^{(i)} \\ \varphi^{(k)} \end{array} \right) \end{array} \right] = -\Delta \dot{\varphi} - \Pi \varphi. \quad (4.5-1)$$

$\Delta$  und  $\Pi$  sind konstante, symmetrische  $(3n \times 3n)$ -Matrizen mit dyadischen Produkten als Untermatrizen. Jedes Achsgelenk füllt vier Untermatrizen. Hat der Körper  $k$  mehrere Achsgelenke, dann überlagern sich entsprechend viele Untermatrizen in der Zeile  $k$  der Matrizen  $\Delta$  und  $\Pi$ .

Wenn das Gelenk  $a$  zwischen den Körpern  $i$  und  $k$  ein Kardangelenk mit Drehfedern und Dämpfern an beiden Achsen ist, dann treten an die Stelle der Untermatrizen  $b_a f_a f_a^T$  und  $c_a f_a f_a^T$  die Ausdrücke

$$(b_{ai} f_{ai} f_{ai}^T + b_{ak} f_{ak} f_{ak}^T) \quad \text{und} \quad (c_{ai} f_{ai} f_{ai}^T + c_{ak} f_{ak} f_{ak}^T).$$

Darin sind  $b_{ai}$ ,  $c_{ai}$  die Dämpfungs- und Federkonstanten an der auf dem Körper  $i$  festen Achse,  $b_{ak}$  und  $c_{ak}$  die entsprechenden Werte für die auf Körper  $k$  feste Achse.  $f_{ai}$  ist die Komponentendarstellung eines Einheitsvektors

in Richtung der auf Körper  $i$  festen Achse ausgedrückt im Koordinatensystem  $\vec{e}^{(i)}$ ,  $f_{ak}$  die Komponentendarstellung eines Einheitsvektors in der auf Körper  $k$  festen Achse im Koordinatensystem  $\vec{e}^{(k)}$ .

Wenden wir uns nun den Zwangsmomenten  $\vec{Q}_a$  zu. Die im folgenden gewählte Beschreibung wurde von *Hooker/Margoulis* [24] vorgeschlagen.

In einem Kardangelenke wirkt ein Zwangsmoment senkrecht zu den beiden Kardanachsen. In einem Achsgelenke wirkt eines senkrecht zur Achse. Wir können es in zwei zueinander und zur Achse orthogonale Zwangsmomente zerlegen (bei willkürlicher Vorgabe einer der beiden Richtungen). Um von der Unterscheidung zwischen Achs- und Kardangelenken frei zu werden, formulieren wir diesen Sachverhalt so: Sei  $\pi_a$  (gleich 1 oder 2) die Anzahl der im Gelenke  $a$  aufgehobenen Freiheitsgrade. Dann wirken dort  $\pi_a$  zueinander orthogonale Zwangsmomente  $Q_{as}$ . Ihre Richtungen sind festgelegt durch die Einheitsvektoren  $\vec{p}_{as}$ , die durch die konstruktiven Gegebenheiten des Gelenkes (im Fall  $\pi_a = 2$  mit einer gewissen Freiheit der Wahl) bestimmt sind.

Die Anzahl aller Zwangsmomente  $Q_{as}$  des ganzen Systems ist  $\pi = \sum_{a=1}^{n-1} \pi_a$ . Mit der gewählten Beschreibung ist

$$\vec{Q}_a = \vec{p}_{as} Q_{as} \quad \text{und} \quad \vec{Q}_a = \sum_{s=1}^{\pi_a} Q_{as}.$$

Die im Ausdruck  $\vec{e} \odot \mathbf{S} \|\vec{Q}_a\|_{a=1, \dots, n-1}$  stehende Spaltenmatrix  $\|\vec{Q}_a\|_{a=1, \dots, n-1}$  ist vorteilhaft zu ersetzen durch die Spaltenmatrix  $\|Q_{as}\|_{as=1, \dots, \pi}$  aller  $\pi$  Zwangsmomente. Das erfordert eine Umgruppierung der Matrix  $\vec{e} \odot \mathbf{S}$ . Das Ergebnis ist eine  $(3n \times \pi)$ -Matrix. Ihre  $(3 \times 1)$ -Untermatrizen, gekennzeichnet durch die Indizes  $i = 1, \dots, n$  und  $as = 1, \dots, \pi$  sind  $+\vec{e}^{(i)}$ , wenn  $S_{ia} = +1$ ,  $-\vec{e}^{(i)}$ , wenn  $S_{ia} = -1$  und  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , wenn  $S_{ia} = 0$ .

Das Skalarprodukt  $\vec{e}^{(i)} \odot \vec{p}_{as}$ , d. h. die Komponentendarstellung von  $\vec{p}_{as}$  im körperfesten Koordinatensystem  $\vec{e}^{(i)}$ , ist abhängig von der Lage des Körpers  $i$ . In der Gleichgewichtslage selbst sei es  $\vec{p}_{as}^*$ . Von dieser Größe unterscheidet es sich außerhalb der Gleichgewichtslage durch Größen erster Ordnung in den  $\varphi_{1,2,3}^{(i)}$ . Diese Abweichungen führen im Verlauf der Elimination der Zwangsmomente aus den Bewegungsgleichungen nur zu Größen zweiter Ordnung, können also von vornherein vernachlässigt werden. Das Produkt  $\vec{e} \odot \mathbf{S} \|\vec{Q}_a\|_{a=1, \dots, n-1}$  ist daher darstellbar in der Form

$$\mathbf{P}^* \|Q_{as}\|_{as=1, \dots, \pi} \quad (4.5-2)$$

mit der konstanten  $(3n \times \pi)$ -Matrix  $\mathbf{P}^*$ , deren Untermatrizen lauten

$$\mathbf{P}_{ias}^* = \begin{cases} +\vec{p}_{as}^*, & \text{wenn } S_{ia} = +1 \\ -\vec{p}_{as}^*, & \text{wenn } S_{ia} = -1 \\ \mathbf{0}, & \text{wenn } S_{ia} = 0. \end{cases}$$

Mit den Gln. (4.5-1) und (4.5-2) erweitern sich die linearisierten Bewegungsgleichungen (4.1-4) zu der Form

$$\alpha \ddot{\boldsymbol{\varphi}} + (\omega_0 \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\Delta}) \dot{\boldsymbol{\varphi}} + (\omega_0^2 \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\Pi}) \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{P}^* \|Q_{a_s}\|_{a_s=1, \dots, \pi} . \quad (4.5-3)$$

### Die kinematischen Gelenkbedingungen

Wie bisher seien  $i$  und  $k$  die Nummern der durch das Gelenk  $a$  gekoppelten Körper. Im Gelenk wirken  $\pi_a$  Zwangsmomente in Richtung der Vektoren  $\vec{p}_{a_s}$ . Die beiden Körper sind durch die Bedingung verknüpft, daß die Differenz der Winkelgeschwindigkeiten  $(\vec{\omega}^{(i)} - \vec{\omega}^{(k)})$  senkrecht auf allen Vektoren  $\vec{p}_{a_s}$  stehen muß. Mit  $\vec{\omega}^{(i)} - \vec{\omega}^{(k)} = \dot{\boldsymbol{\varphi}}^{(i)} - \dot{\boldsymbol{\varphi}}^{(k)}$  lautet diese Forderung in Matrizenform

$$\mathbf{p}_{a_s}^{*\top} (\dot{\boldsymbol{\varphi}}^{(i)} - \dot{\boldsymbol{\varphi}}^{(k)}) + \dots = 0 .$$

(Punkte deuten wie bisher vernachlässigte Größen höherer Ordnung an.) Alle kinematischen Gelenkbedingungen werden zusammengefaßt in der Gleichung

$$\mathbf{P}^{*\top} \dot{\boldsymbol{\varphi}} = 0 . \quad (4.5-4)$$

$\mathbf{P}^*$  ist die in der Gl. (4.5-2) stehende Matrix. Aus Gl. (4.5-4) folgt sofort

$$\mathbf{P}^{*\top} \ddot{\boldsymbol{\varphi}} = 0 . \quad (4.5-5)$$

Diese Beziehung ermöglicht die Elimination der Zwangsmomente aus Gl. (4.5-3). Zunächst ergibt sich aus Gl. (4.5-3)

$$\ddot{\boldsymbol{\varphi}} = \alpha^{-1} [\mathbf{P}^* \|Q_{a_s}\|_{a_s=1, \dots, \pi} - (\omega_0 \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\Delta}) \dot{\boldsymbol{\varphi}} - (\omega_0^2 \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\Pi}) \boldsymbol{\varphi}] .$$

Substitution in Gl. (4.5-5) und Auflösung nach  $\|Q_{a_s}\|_{a_s=1, \dots, \pi}$  führt zu

$$\|Q_{a_s}\|_{a_s=1, \dots, \pi} = (\mathbf{P}^{*\top} \alpha^{-1} \mathbf{P}^*)^{-1} \mathbf{P}^{*\top} \alpha^{-1} [(\omega_0 \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\Delta}) \dot{\boldsymbol{\varphi}} + (\omega_0^2 \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\Pi}) \boldsymbol{\varphi}] .$$

Das ergibt mit Gl. (4.5-3) schließlich die gewünschte Beziehung

$$\alpha \ddot{\boldsymbol{\varphi}} + [E_{3n} - \mathbf{P}^* (\mathbf{P}^{*\top} \alpha^{-1} \mathbf{P}^*)^{-1} \mathbf{P}^{*\top} \alpha^{-1}] [(\omega_0 \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\Delta}) \dot{\boldsymbol{\varphi}} + (\omega_0^2 \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\Pi}) \boldsymbol{\varphi}] = 0 . \quad (4.5-6)$$

$E_{3n}$  ist eine  $3n$ -zeilige Einheitsmatrix.

In dieser Gleichung ist i. a. weder die Koeffizientenmatrix von  $\boldsymbol{\varphi}$  symmetrisch, noch die gyroskopische Matrix

$$[E_{3n} - \mathbf{P}^* (\mathbf{P}^{*\top} \alpha^{-1} \mathbf{P}^*)^{-1} \mathbf{P}^{*\top} \alpha^{-1}] \boldsymbol{\beta}$$

schiefssymmetrisch. Zwar gilt wie bisher der Satz von *Kelvin-Tait-Chetaev*, daß die Stabilität bzw. Instabilität aus der reduzierten Gleichung

$$\alpha \ddot{\boldsymbol{\varphi}} + [E_{3n} - \mathbf{P}^* (\mathbf{P}^{*\top} \alpha^{-1} \mathbf{P}^*)^{-1} \mathbf{P}^{*\top} \alpha^{-1}] (\omega_0^2 \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\Pi}) \boldsymbol{\varphi} = 0 \quad (4.5-7)$$

abzulesen ist. Die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix von  $\Phi$  erlauben jedoch keine Aussage mehr. Da die Eigenwerte der Gl. (4.5–7) im Fall der Stabilität gerade auf der Stabilitätsgrenze liegen, sind bei numerischer Auswertung wegen der Abrundungsfehler sichere Aussagen nicht möglich. Man muß in diesem Fall das vollständige Gleichungssystem (4.5–3) mit positiv definiter Dämpfungsmatrix untersuchen. Dann haben stabile Systeme nur Eigenwerte mit negativem Realteil.

## 5. Zusammenfassung und Schlußbemerkungen

In der Literatur über das dynamische Verhalten von Mehrkörper-Satellitensystemen wurden bisher nur Systeme untersucht, die so einfach aufgebaut sind, daß die Kenntnis des Verhaltens eines einzelnen starren Körpers ausreicht, um ohne Rechnung eine Gleichgewichtslage in einer kreisförmigen Umlaufbahn vorherzusagen. Die Bewegungen des Systems um diese Gleichgewichtslage wurden dann untersucht.

Die Frage, ob diese Systeme noch andere Gleichgewichtslagen besitzen und wie die Gleichgewichtslagen unregelmäßig aufgebauter Systeme zu bestimmen sind, wurde nicht gestellt. Sie ist Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Betrachtet werden Systeme von beliebig vielen Körpern, die (in fast unbeschränkter Willkür der Anordnung) gelenkig aneinandergesammelt sind.

Die Differentialgleichungen der Bewegung solcher Systeme im Gravitationsfeld der Erde werden mit Hilfe der Lagrangeschen Methode und (in einem Anhang) mit Methoden der Vektormechanik aufgestellt. Aus ihnen ergeben sich Gleichgewichtsbedingungen für Satelliten auf kreisförmigen Umlaufbahnen.

Diese Gleichgewichtsbedingungen sind nicht geschlossen lösbar. Es werden mehrere für technische Anwendungen interessante Gruppen von Lösungen gewonnen. Dabei erweist sich, daß eine überraschende Vielzahl von Gleichgewichtslagen existiert. Selbst für die in der Literatur bisher behandelten Systeme ergeben sich zahlreiche bislang nicht bekannte Lösungen.

Die Stabilität der Gleichgewichtslagen wird in einer Untersuchung kleiner Störungen bestimmt. Es wird weiterhin gezeigt, wie durch konstruktive Veränderungen der Gelenke die Stabilität zu beeinflussen ist.

## ANHANG

### Die Ableitung der Bewegungsgleichungen mit Methoden der Vektormechanik

#### A1. Die Bewegungsgleichungen für beliebige eingeprägte Kräfte und Momente

In diesem Anhang wird dargestellt, wie die Bewegungsgleichungen (1.6–1) und (1.6–2) zuerst hergeleitet wurden (s. [25]). Die hier gewählte Darstellung führt die Matrizen Schreibweise systematisch durch. Der Verzicht auf Tensoren macht sie leichter verständlich als die ursprüngliche Fassung.

Die Ausführungen von Kapitel (1.1) machten deutlich, wieviel einfacher die Herleitung der Eulerschen Bewegungsgleichungen für den einzelnen starren Körper mit Hilfe der Vektormechanik ist als bei Anwendung der Lagrange-



sehen Gleichungen. Auch beim  $n$ -Körper-System ist der vektoriellen Methode der Vorzug zu geben. Allerdings ist auch dann die Lösung des Problems langwierig. Bei der Beurteilung der Kürze der folgenden Darstellung ist zu berücksichtigen, daß zahlreiche Definitionen und Beziehungen aus Kapitel (1) übernommen werden können.

Seien  $\vec{r}_0$  bzw.  $\vec{r}^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) die Radiusvektoren des Massenmittelpunktes des Systems bzw. des Körpers  $i$  in einem Inertialsystem  $x, y, z$  (s. Abb. 32). Sei ferner  $\vec{F}^{(i)}$  die von außerhalb des Systems auf den Körper  $i$  wirkende eingeprägte Kraft,  $\vec{L}^{(i)}$  das eingeprägte, auf den Massenmittelpunkt des Körpers  $i$  bezogene Moment (s. Abb. 33). In einem Gelenk  $a$  des Körpers  $i$  wirken die Reaktionskraft  $\vec{X}_a$  und das Reaktionsmoment  $\vec{Y}_a$ .  $\vec{X}_a$  und  $\vec{Y}_a$  werden hervorgerufen durch Gelenkmechanismen, die den Freiheitsgrad der relativen Drehung der gekoppelten Körper einschränken, sowie durch Federn und Dämpfer.

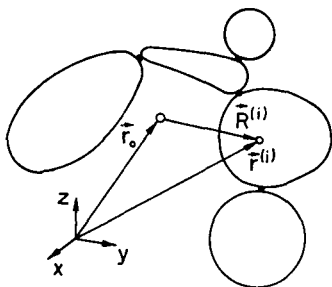


Abb. 32

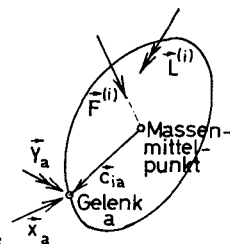


Abb. 33

Wenn  $\vec{H}^{(i)}$  den Drall des Körpers  $i$  im Inertialsystem bezeichnet, lauten die Bewegungsgleichungen dieses Körpers

$$m^{(i)} \ddot{\vec{r}}^{(i)} = \vec{F}^{(i)} + \sum \vec{X}_a, \quad (\text{A1-1})$$

$$\dot{\vec{H}}^{(i)} = \vec{L}^{(i)} + \sum \vec{Y}_a + \sum \vec{c}_{ia} \times \vec{X}_a. \quad (\text{A1-2})$$

Die Summationen erstrecken sich über alle Gelenke  $a$  des Körpers  $i$ . Die Substitution  $\vec{r}^{(i)} = \vec{R}^{(i)} + \vec{r}_0$  (s. Abb. 32) führt die Variablen  $\vec{R}^{(i)}$  ein. Der Massenmittelpunkt des Systems bewegt sich entsprechend der Gleichung

$$\ddot{\vec{r}}_0 = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^n \vec{F}^{(j)}.$$

Mit diesen Beziehungen läßt sich Gl. (A1-1) in die Form

$$m^{(i)} \ddot{\vec{R}}^{(i)} = \sum_{j=1}^n \mu_{ij} \vec{F}^{(j)} + \sum \vec{X}_a \quad (\text{A1-3})$$

bringen. Darin ist  $\mu_{ij}$  ein Element der durch Gl. (1.2.2-2) definierten Massenverhältnismatrix  $\mu$ .

So wie früher die  $n$  Vektoren  $\vec{R}^{(i)}$  in einer Spaltenmatrix  $||\vec{R}^{(i)}||_{i=1, \dots, n}$  ver-

einigt wurden, werden nun entsprechende Spaltenmatrizen  $\|\vec{H}^{(i)}\|_{i=1,\dots,n}$ ,  $\|\vec{F}^{(i)}\|_{i=1,\dots,n}$  und  $\|\vec{L}^{(i)}\|_{i=1,\dots,n}$  definiert. Die  $n-1$  Reaktionen  $\vec{X}_a$  und  $\vec{Y}_a$  bilden in gleicher Weise Spaltenmatrizen  $\|\vec{X}_a\|_{a=1,\dots,n-1}$  und  $\|\vec{Y}_a\|_{a=1,\dots,n-1}$ .

In Kapitel (1.2.5) wurde die zu  $\|\vec{R}^{(i)}\|_{i=1,\dots,n}$  gehörende  $3n$ -zeilige Spaltenmatrix  $\mathbf{R}$  der körperfesten Komponenten von  $\vec{R}^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) definiert. Zu  $\|\vec{H}^{(i)}\|_{i=1,\dots,n}$ ,  $\|\vec{F}^{(i)}\|_{i=1,\dots,n}$  und  $\|\vec{L}^{(i)}\|_{i=1,\dots,n}$  führen wir entsprechende  $3n$ -zeilige Spaltenmatrizen  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{L}$  ein. Es gelten die Beziehungen

$$\|\vec{R}^{(i)}\|_{i=1,\dots,n} = \vec{e}^T \mathbf{R} \quad \text{usw.}$$

Die Gln. (A1-2) und (A1-3) können nun unter Zusammenfassung aller  $n$  Körper in der Form

$$m \frac{d^2}{dt^2} (\vec{e}^T \mathbf{R}) = \mu \vec{e}^T \mathbf{F} + \mathbf{S} \|\vec{X}_a\|_{a=1,\dots,n-1}, \quad (\text{A1-4})$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{e}^T \mathbf{H}) = \vec{e}^T \mathbf{L} + \mathbf{S} \|\vec{Y}_a\|_{a=1,\dots,n-1} + \vec{e}^T \mathbf{C} \otimes \|\vec{X}_a\|_{a=1,\dots,n-1} \quad (\text{A1-5})$$

geschrieben werden.  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{C}$  sind die durch die Gln. (1.2.1-1) und (1.2.1-3) definierten Matrizen. Die Verteilung der Werte  $+1$ ,  $-1$  und Null in ihnen sorgt dafür, daß die Reaktionen  $\vec{X}_a$  und  $\vec{Y}_a$  mit den richtigen Koeffizienten in jeder der  $n$  Gleichungen stehen.  $\otimes$  ist das Symbol für die vektorielle Matrizenmultiplikation.

Satz 1 gestattet die Auflösung der Gl. (A1-4) nach

$$\|\vec{X}_a\|_{a=1,\dots,n-1} = \mathbf{T} \left[ m \frac{d^2}{dt^2} (\vec{e}^T \mathbf{R}) - \mu \vec{e}^T \mathbf{F} \right]. \quad (\text{A1-6})$$

Substitution in Gl. (A1-5) führt zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{e}^T \mathbf{H}) = & \vec{e}^T \mathbf{L} + \vec{e}^T \mathbf{C} \otimes \mathbf{T} \left[ m \frac{d^2}{dt^2} (\vec{e}^T \mathbf{R}) - \mu \vec{e}^T \mathbf{F} \right] + \\ & + \mathbf{S} \|\vec{Y}_a\|_{a=1,\dots,n-1}. \end{aligned} \quad (\text{A1-7})$$

Diese Beziehung ist bereits das gesuchte System von Gleichungen für die Drehbewegungen der Körper. Es erfordert jedoch noch eine Reihe von Umformungen. Der Drall  $\mathbf{H}$  und die Radiusvektoren  $\vec{R}^{(i)}$  müssen substituiert werden, und schließlich ist der Übergang von  $n$  vektoriellen zu  $3n$  skalaren Gleichungen zu vollziehen.

Zu diesem Zweck schreiben wir unter Verwendung früher definierter Symbole (s. Gl. (1.2.2-3) und Kap. (1.2.5))

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \quad (\text{A1-8})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{e}^\top \mathbf{H}) &= \vec{e}^\top \mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\vec{e}}^\top \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \\ &= \vec{e}^\top (\mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}) . \end{aligned} \quad (\text{A1-9})$$

Aus Satz 5 folgt

$$\frac{d^2}{dt^2} (\vec{e}^\top \mathbf{R}) = -\boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{T}^\top \mathbf{C}^\top \ddot{\vec{e}} \mathbf{1}_n .$$

Dieselben Überlegungen, die Gl. (1.2.6-2) zugrunde liegen, führen auf

$$\ddot{\vec{e}} = -\tilde{\boldsymbol{\omega}} \dot{\vec{e}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \vec{e} .$$

Also ist

$$\frac{d^2}{dt^2} (\vec{e}^\top \mathbf{R}) = \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{T}^\top \mathbf{C}^\top (\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}}) \vec{e} \mathbf{1}_n . \quad (\text{A1-10})$$

Setzt man die Gln. (A1-9) und (A1-10) in Gl. (A1-7) ein, multipliziert die ganze Gleichung von links her skalar mit  $\vec{e}$  und beachtet, daß  $\vec{e} \circ \vec{e}^\top$  eine  $3n$ -zeilige Einheitsmatrix ist, dann erhält man das System von  $3n$  skalaren Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{L} - \vec{e} \circ \vec{e}^\top \otimes \mathbf{C} \mathbf{T} \boldsymbol{\mu} \vec{e}^\top \mathbf{F} + \\ &+ \vec{e} \circ \vec{e}^\top \otimes \mathbf{C} \mathbf{T} \mathbf{m} \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{T}^\top \mathbf{C}^\top (\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}}) \vec{e} \mathbf{1}_n + \\ &+ \vec{e} \circ \mathbf{S} \parallel \vec{Y}_a \parallel_{a=1, \dots, n-1} . \end{aligned} \quad (\text{A1-11})$$

Zwei Glieder auf der rechten Seite enthalten vektorielle Produkte, die vor der skalaren Multiplikation auszuführen sind.

Durch Ausmultiplizieren überzeugt man sich leicht von der überraschenden Beziehung

$$\boldsymbol{\mu} \mathbf{m} \boldsymbol{\mu}^\top = \mathbf{m} \boldsymbol{\mu}^\top . \quad (\text{A1-12})$$

Infolgedessen ist (vgl. Gl. (1.2.6-3))

$$\mathbf{C} \mathbf{T} \mathbf{m} \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{T}^\top \mathbf{C}^\top = \mathbf{C} \mathbf{T} \boldsymbol{\mu} \mathbf{m} \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{T}^\top \mathbf{C}^\top = \mathbf{J} .$$

Das Glied mit  $\mathbf{J}$  wird weiter umgeformt.

$$\vec{e} \circ \vec{e}^\top \otimes \mathbf{J} (\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}}) \vec{e} \mathbf{1}_n$$

ist eine  $3n$ -zeilige Spaltenmatrix mit 3-zeiligen Untermatrizen. Der von  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$  herrührende Anteil der  $i$ -ten Untermatrix ist

$$\begin{aligned} (\vec{e} \circ \vec{e}^\top \otimes \mathbf{J} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \vec{e} \mathbf{1}_n)^{(i)} &= (\vec{e} \otimes \vec{e}^\top \circ \mathbf{J} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \vec{e} \mathbf{1}_n)^{(i)} \\ &= \vec{e}^{(i)} \otimes \vec{e}^{(i)\top} \circ \mathbf{J}_{ii} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(i)} \vec{e}^{(i)} + \\ &+ \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \vec{e}^{(i)} \otimes \vec{e}^{(j)\top} \circ \mathbf{J}_{ij} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(j)} \vec{e}^{(j)} . \end{aligned} \quad (\text{A1-13})$$

Durch Ausmultiplizieren findet man, daß

$$\vec{e}^{(i)} \otimes \vec{e}^{(i)\top} = \begin{bmatrix} 0 & \vec{e}_3 & -\vec{e}_2 \\ -\vec{e}_3 & 0 & \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 & -\vec{e}_1 & 0 \end{bmatrix} = -\tilde{\vec{e}}^{(i)}$$

Damit ist das erste Glied in Gl. (A1-13)

$$\begin{aligned} \vec{e}^{(i)} \otimes \vec{e}^{(i)\top} \odot J_{ii} \tilde{\omega}^{(i)} \vec{e}^{(i)} &= -\tilde{\vec{e}}^{(i)} \odot J_{ii} \tilde{\omega} \vec{e}^{(i)} \\ &= \tilde{\vec{e}}^{(i)} \odot J_{ii} \vec{e}^{(i)} \tilde{\omega}^{(i)} \\ &= -\Phi^{(i)} \tilde{\omega}^{(i)} \end{aligned} \quad (\text{A1-14})$$

(vgl. Gl. (1.2.6-6)). Für einen einzelnen Summanden unter dem Summenzeichen in Gl. (A1-13) liefert Satz 7 den Ausdruck

$$\begin{aligned} \vec{e}^{(i)} \otimes \vec{e}^{(i)\top} \odot J_{ij} \tilde{\omega}^{(j)} \vec{e}^{(j)} &= M \tilde{\vec{e}}^{(i)} B_{ij} \odot B_{ji}^\top \tilde{\omega}^{(j)} \vec{e}^{(j)} \\ &= M \tilde{B}_{ij} \vec{e}^{(i)} \odot B_{ji}^\top \tilde{\vec{e}}^{(j)} \tilde{\omega}^{(j)} \\ &= -M \tilde{B}_{ij} \vec{e}^{(i)} \odot \vec{e}^{(j)\top} \tilde{B}_{ji} \tilde{\omega}^{(j)} \\ &= -M \tilde{B}_{ij} \Theta^{(i)} \Theta^{(j)\top} \tilde{B}_{ji} \tilde{\omega}^{(j)} \\ &= -\Psi_{ij} \tilde{\omega}^{(j)} \end{aligned} \quad (\text{A1-15})$$

(vgl. Gl. (1.2.6-7)). Die Gl. (A1-13) kann nun ersetzt werden durch

$$(\vec{e} \odot \vec{e}^\top \otimes J \tilde{\omega} \vec{e} \mathbf{1}_n)^{(i)} = -\Phi^{(i)} \tilde{\omega}^{(i)} - \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \Psi_{ij} \tilde{\omega}^{(j)}. \quad (\text{A1-16})$$

In ähnlicher Weise wird der Ausdruck in Gl. (A1-11) umgeformt, der das Produkt  $J \tilde{\omega} \tilde{\omega}$  enthält. Dessen  $i$ -te Untermatrix ist

$$\begin{aligned} (\vec{e} \otimes \vec{e}^\top \odot J \tilde{\omega} \tilde{\omega} \vec{e} \mathbf{1}_n)^{(i)} &= -\tilde{\vec{e}}^{(i)} \odot J_{ii} \tilde{\omega}^{(i)} \tilde{\omega}^{(i)} \vec{e}^{(i)} - \\ &\quad - \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{\vec{e}}^{(i)} \odot J_{ij} \tilde{\omega}^{(j)} \tilde{\omega}^{(j)} \vec{e}^{(j)}. \end{aligned} \quad (\text{A1-17})$$

Das erste Glied ist

$$-\tilde{\vec{e}}^{(i)} \odot J_{ii} \tilde{\omega}^{(i)} \tilde{\omega}^{(i)} \vec{e}^{(i)} = \tilde{\vec{e}}^{(i)} \odot J_{ii} \tilde{\omega}^{(i)} \tilde{\vec{e}}^{(i)} \omega^{(i)}$$

und wegen

$$\tilde{\omega}^{(i)} \tilde{\vec{e}}^{(i)} = \vec{e}^{(i)} \omega^{(i)\top} - \vec{e}^{(i)\top} \omega^{(i)} E_3$$

(vgl. Gl. (1.4–19))

$$\begin{aligned}
 -\tilde{\mathbf{e}}^{(i)} \odot \mathbf{J}_{ii} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(i)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(i)} \mathbf{e}^{(i)} &= \tilde{\mathbf{e}}^{(i)} \odot \mathbf{J}_{ii} \vec{\mathbf{e}}^{(i)} \boldsymbol{\omega}^{(i)\top} \boldsymbol{\omega}^{(i)} - \\
 &- (\vec{\mathbf{e}}^{(i)\top} \boldsymbol{\omega}^{(i)}) \odot \tilde{\mathbf{e}}^{(i)} \mathbf{J}_{ii} \boldsymbol{\omega}^{(i)}.
 \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie von  $\mathbf{J}_{ii}$  ist

$$\tilde{\mathbf{e}}^{(i)} \odot \mathbf{J}_{ii} \vec{\mathbf{e}}^{(i)} = \mathbf{0}.$$

Außerdem ergibt sich

$$\begin{aligned}
 (\vec{\mathbf{e}}^{(i)\top} \boldsymbol{\omega}^{(i)}) \odot \tilde{\mathbf{e}}^{(i)} &= \\
 &= (\omega_1^{(i)} \vec{\mathbf{e}}_1^{(i)} + \omega_2^{(i)} \vec{\mathbf{e}}_2^{(i)} + \omega_3^{(i)} \vec{\mathbf{e}}_3^{(i)}) \odot \begin{bmatrix} 0 & -\vec{\mathbf{e}}_3^{(i)} & \vec{\mathbf{e}}_2^{(i)} \\ \vec{\mathbf{e}}_3^{(i)} & 0 & -\vec{\mathbf{e}}_1^{(i)} \\ -\vec{\mathbf{e}}_2^{(i)} & \vec{\mathbf{e}}_1^{(i)} & 0 \end{bmatrix} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(i)}.
 \end{aligned}$$

Es folgt, daß

$$\begin{aligned}
 -\tilde{\mathbf{e}}^{(i)} \odot \mathbf{J}_{ii} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(i)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(i)} \vec{\mathbf{e}}^{(i)} &= -\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(i)} \mathbf{J}_{ii} \boldsymbol{\omega}^{(i)} \\
 &= \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(i)} \boldsymbol{\Phi}^{(i)} \boldsymbol{\omega}^{(i)}.
 \end{aligned} \tag{A1-18}$$

Der letzte Schluß ergibt sich aus der Tatsache, daß

$$\boldsymbol{\Phi}^{(i)} = -\mathbf{J}_{ii} + (\text{Sp } \mathbf{J}_{ii}) \mathbf{E}_3 \quad \text{und} \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(i)} \boldsymbol{\omega}^{(i)} = \mathbf{0}.$$

Jedes einzelne Glied unter dem Summenzeichen in Gl. (A1-17) ist

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{e}}^{(i)} \odot \mathbf{J}_{ij} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(j)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(j)} \mathbf{e}^{(j)} &= -M \tilde{\mathbf{e}}^{(i)} \mathbf{B}_{ij} \odot \mathbf{B}_{ji}^\top \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(j)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(j)} \vec{\mathbf{e}}^{(i)} \\
 &= M \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \vec{\mathbf{e}}^{(i)} \odot \mathbf{e}^{(j)\top} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(j)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(j)} \mathbf{B}_{ji} \\
 &= M \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \boldsymbol{\Theta}^{(i)} \boldsymbol{\Theta}^{(j)\top} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(j)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(j)} \mathbf{B}_{ji}.
 \end{aligned} \tag{A1-19}$$

Damit lautet Gl. (A1-17)

$$(\vec{\mathbf{e}} \otimes \vec{\mathbf{e}}^\top \odot \mathbf{J} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \vec{\mathbf{e}} \mathbf{1}_n)^{(i)} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(i)} \boldsymbol{\Phi}^{(i)} \boldsymbol{\omega}^{(i)} - M \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \boldsymbol{\Theta}^{(i)} \boldsymbol{\Theta}^{(j)\top} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(j)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(j)} \mathbf{B}_{ji}. \tag{A1-20}$$

Mit den Gln. (A1-16) und (A1-20) nimmt Gl. (A1-11) die Gestalt an

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{K} + \boldsymbol{\Psi}) \dot{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{K} \boldsymbol{\omega} - M \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \boldsymbol{\Theta}^{(i)} \boldsymbol{\Theta}^{(j)\top} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(j)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(j)} \mathbf{B}_{ji} \right\|_{i=1, \dots, n} &= \\
 = \mathbf{L} - \vec{\mathbf{e}} \odot \vec{\mathbf{e}}^\top \otimes \mathbf{C} \mathbf{T} \boldsymbol{\mu} \vec{\mathbf{e}}^\top \mathbf{F} + \vec{\mathbf{e}} \odot \mathbf{S} \|\vec{\mathbf{Y}}_a\|_{a=1, \dots, n-1}.
 \end{aligned} \tag{A1-21}$$

Der Faktor vor  $\mathbf{F}$  ist leicht zu interpretieren. Er ist (das Minuszeichen eingeschlossen) eine  $(3n \times 3n)$ -Matrix  $\mathbf{P}$  mit den Untermatrizen

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{ij} &= -\vec{\mathbf{e}}^{(i)} \odot \vec{\mathbf{e}}^{(i)\top} \otimes (\mathbf{C} \mathbf{T} \boldsymbol{\mu})_{ij} \vec{\mathbf{e}}^{(j)\top} \\
&= \vec{\mathbf{e}}^{(i)} \otimes \vec{\mathbf{e}}^{(i)\top} \odot \mathbf{B}_{ij} \vec{\mathbf{e}}^{(j)\top} \\
&= -\tilde{\vec{\mathbf{e}}}^{(i)} \odot \mathbf{B}_{ij} \vec{\mathbf{e}}^{(j)\top} \\
&= \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \vec{\mathbf{e}}^{(i)} \odot \vec{\mathbf{e}}^{(j)\top} \\
&= \tilde{\mathbf{B}}_{ij} \boldsymbol{\Theta}^{(i)} \boldsymbol{\Theta}^{(j)\top}.
\end{aligned} \tag{A1-22}$$

Darin drückt sich aus, daß die auf den Körper  $j$  wirkende Kraft  $\vec{\mathbf{F}}^{(j)}$  auf den Körper  $i$  ein Moment  $\tilde{\mathbf{B}}_{ij} \times \vec{\mathbf{F}}^{(j)}$  ausübt.

Die Gln. (A1-21) und (A1-22) sind die gesuchten Bewegungsgleichungen für beliebige eingeprägte Kräfte und Momente.

## A2. Die eingeprägten Momente im Newtonschen Gravitationsfeld

Die Gleichung (A1-21) ist anwendbar auf beliebige eingeprägte Kräfte und Momente. Um die Übereinstimmung mit Gl. (1.6-1) zu zeigen, müssen die Kräfte und Momente im Gravitationsfeld berechnet werden.

Das Moment  $\vec{\mathbf{L}}^{(i)}$  auf einen einzelnen Körper ergibt sich bei Vernachlässigung von Größen höherer als erster Ordnung in  $\varrho^{(i)}/r_0$  und  $R^{(i)}/r_0$  zu<sup>24)</sup> (vgl. Abb. 8)

$$\vec{\mathbf{L}}^{(i)} = \frac{3}{r_0^5} \vec{\mathbf{r}}_0 \times \int_{m^{(i)}} \vec{\varrho}^{(i)} (\vec{\mathbf{r}}_0 \cdot \vec{\varrho}^{(i)}) \, dm.$$

Nun ist nach dem Entwicklungssatz der Vektorrechnung

$$\vec{\varrho}^{(i)} (\vec{\mathbf{r}}_0 \cdot \vec{\varrho}^{(i)}) = -\vec{\varrho}^{(i)} \times (\vec{\varrho}^{(i)} \times \vec{\mathbf{r}}_0) + \varrho^{(i)2} \vec{\mathbf{r}}_0,$$

also

$$\vec{\mathbf{L}}^{(i)} = \frac{3}{r_0^5} \vec{\mathbf{r}}_0 \times \int_{m^{(i)}} [-\vec{\varrho}^{(i)} \times (\vec{\varrho}^{(i)} \times \vec{\mathbf{r}}_0)] \, dm.$$

Beim Übergang zur Matrizenschreibweise ist zu beachten, daß  $\vec{\mathbf{r}}_0$  im Koordinatensystem  $\vec{\mathbf{e}}^{(i)}$  die Komponenten  $r_0 \boldsymbol{\Theta}_3^{(i)}$  hat, so daß

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}^{(i)} &= \frac{3}{r_0^3} \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_3^{(i)} \left[ - \int_{m^{(i)}} \tilde{\boldsymbol{\rho}}^{(i)} \tilde{\boldsymbol{\rho}}^{(i)} \, dm \right] \boldsymbol{\Theta}_3^{(i)} \\
&= \frac{3}{r_0^3} \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_3^{(i)} \mathbf{I}^{(i)} \boldsymbol{\Theta}_3^{(i)}.
\end{aligned}$$

Die Spaltenmatrix aller  $n$  Untermatrizen  $\mathbf{L}^{(i)}$  ist folglich

$$\mathbf{L} = \frac{3}{r_0^3} \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_3 \mathbf{I} \boldsymbol{\Theta}_3. \tag{A2-1}$$

<sup>24)</sup> Siehe Lur'e [6] und Halfman [33].

### A3. Die eingepägten Kräfte im Newtonschen Gravitationsfeld

Die Gravitationskraft  $\vec{F}^{(i)}$  berechnet sich zu

$$\vec{F}^{(i)} = -\frac{\kappa}{r_0^3} m^{(i)} \vec{r}_0 - \frac{\kappa}{r_0^3} m^{(i)} \left[ \vec{R}^{(i)} - \frac{3}{r_0^2} (\vec{R}^{(i)} \cdot \vec{r}_0) \vec{r}_0 \right]$$

(vgl. [33]). Die Spaltenmatrix aller  $n$  Vektoren  $\vec{F}^{(i)}$  ist folglich bei Beachtung von Satz 5

$$\begin{aligned} \vec{e}^T \mathbf{F} &= \|\vec{F}^{(i)}\|_{i=1, \dots, n} = \\ &= -\frac{\kappa}{r_0^3} \vec{r}_0 \mathbf{m} + \frac{\kappa}{r_0^3} \mathbf{m} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{T}^T \mathbf{C}^T \left[ \vec{e} \mathbf{1}_n - \frac{3}{r_0^2} \vec{r}_0 (\vec{e} \mathbf{1}_n \odot \vec{r}_0) \right]. \end{aligned}$$

Darin ist weiterhin

$$\begin{aligned} \vec{e} \mathbf{1}_n \odot \vec{r}_0 &= r_0 \boldsymbol{\Theta}_3 \\ \vec{r}_0 (\vec{e} \mathbf{1}_n \odot \vec{r}_0) &= r_0^2 \|\boldsymbol{\Theta}_3^{(i)} \boldsymbol{\Theta}_3^{(i)T} \vec{e}^{(i)}\|_{i=1, \dots, n}, \end{aligned}$$

also

$$\vec{e}^T \mathbf{F} = -\frac{\kappa}{r_0^3} \vec{r}_0 \mathbf{m} \mathbf{1}_n + \frac{\kappa}{r_0^3} \mathbf{m} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{T}^T \mathbf{C}^T \left\| (\mathbf{E}_3 - 3 \boldsymbol{\Theta}_3^{(i)} \boldsymbol{\Theta}_3^{(i)T}) \vec{e}^{(i)} \right\|_{i=1, \dots, n}. \quad (\text{A3-1})$$

Es ist zweckmäßig, dieses Ergebnis in Gl. (A1-21) einzusetzen, ohne von Gl. (A1-22) Gebrauch zu machen. Das erste Glied liefert keinen Beitrag, da  $\boldsymbol{\mu} \mathbf{m} \mathbf{1}_n = 0$ . Bei Beachtung von Gl. (A1-12) ergibt sich dann sofort

$$\mathbf{P} \mathbf{F} = -\frac{\kappa}{r_0^3} \vec{e} \odot \vec{e}^T \otimes \mathbf{J} \left\| (\mathbf{E}_3 - 3 \boldsymbol{\Theta}_3^{(i)} \boldsymbol{\Theta}_3^{(i)T}) \vec{e}^{(i)} \right\|_{i=1, \dots, n}. \quad (\text{A3-2})$$

Die  $i$ -te Untermatrix dieser  $3n$ -zeiligen Spaltenmatrix ist

$$\begin{aligned} (\mathbf{P} \mathbf{F})_i &= -\frac{\kappa}{r_0^3} \left[ \vec{e}^{(i)} \odot \vec{e}^{(i)T} \otimes \mathbf{J}_{ii} (\mathbf{E}_3 - 3 \boldsymbol{\Theta}_3^{(i)} \boldsymbol{\Theta}_3^{(i)T}) \vec{e}^{(i)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{e}^{(i)} \odot \vec{e}^{(j)T} \otimes \mathbf{J}_{ij} (\mathbf{E}_3 - 3 \boldsymbol{\Theta}_3^{(j)} \boldsymbol{\Theta}_3^{(j)T}) \vec{e}^{(j)} \right]. \quad (\text{A3-3}) \end{aligned}$$

Aus Gl. (4.1-19) folgt

$$\mathbf{E}_3 - 3 \boldsymbol{\Theta}_3^{(i)} \boldsymbol{\Theta}_3^{(i)T} = -2 \mathbf{E}_3 - 3 \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_3^{(i)} \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_3^{(i)}.$$

Der Anteil

$$\vec{e}^{(i)} \odot \vec{e}^{(i)T} \otimes \mathbf{J}_{ii} \vec{e}^{(i)} = -\tilde{\vec{e}}^{(i)} \odot \mathbf{J}_{ii} \vec{e}^{(i)}$$

ist Null. Von dem ersten Glied in Gl. (A3-3) bleibt also übrig

$$\begin{aligned} \vec{e}^{(i)} \odot \vec{e}^{(i)T} \otimes \mathbf{J}_{ii} (\mathbf{E}_3 - 3 \boldsymbol{\Theta}_3^{(i)} \boldsymbol{\Theta}_3^{(i)T}) \vec{e}^{(i)} &= \\ &= -3 \vec{e}^{(i)} \odot \vec{e}^{(i)T} \otimes \mathbf{J}_{ii} \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_3^{(i)} \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_3^{(i)} \vec{e}^{(i)}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck begegnete uns mit  $\omega^{(i)}$  statt  $\Theta_3^{(i)}$  schon in Gl. (A1-17). Wir können daher schreiben

$$\vec{e}^{(i)} \odot \vec{e}^{(i)\top} \otimes J_{ii} (E_3 - 3 \Theta_3^{(i)} \Theta_3^{(i)\top}) \vec{e}^{(i)} = -3 \tilde{\Theta}_3^{(i)} \Phi^{(i)} \Theta_3^{(i)} . \quad (\text{A3-4})$$

Für ein einzelnes Element unter dem Summenzeichen in Gl. (A3-3) ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{e}^{(i)} \odot \vec{e}^{(i)\top} \otimes J_{ij} (E_3 - 3 \Theta_3^{(j)} \Theta_3^{(j)\top}) \vec{e}^{(j)} &= \\ &= M \tilde{e}^{(i)} \odot B_{ij} B_{ji}^\top \vec{e}^{(j)} - 3 M \tilde{e}^{(i)} \odot B_{ij} B_{ji}^\top \Theta_3^{(j)} \Theta_3^{(j)\top} \vec{e}^{(j)} \\ &= -M \tilde{B}_{ij} \Theta^{(i)} \Theta^{(j)\top} B_{ji} + 3 M \tilde{B}_{ij} \Theta^{(i)} \Theta^{(j)\top} \Theta_3^{(j)} \Theta_3^{(j)\top} B_{ji} \\ &= -M \tilde{B}_{ij} (\Theta^{(i)} \Theta^{(j)\top} - 3 \Theta_3^{(i)} \Theta_3^{(j)\top}) B_{ji} . \end{aligned} \quad (\text{A3-5})$$

Aus den Gln. (A3-3), (A3-4) und (A3-5) folgt dann

$$PF = \frac{\kappa}{r_0^3} \left[ 3 \tilde{\Theta}_3 \Phi \Theta_3 + M \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{B}_{ij} (\Theta^{(i)} \Theta^{(j)\top} - 3 \Theta_3^{(i)} \Theta_3^{(j)\top}) B_{ji} \right\|_{i=1, \dots, n} \right]$$

und mit Gl. (A2-1) zusammen schließlich

$$L + PF = \frac{\kappa}{r_0^3} \left[ 3 \tilde{\Theta}_3 K \Theta_3 + M \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{B}_{ij} (\Theta^{(i)} \Theta^{(j)\top} - 3 \Theta_3^{(i)} \Theta_3^{(j)\top}) B_{ji} \right\|_{i=1, \dots, n} \right] . \quad (\text{A3-6})$$

#### A4. Zusammenfassung der Bewegungsgleichungen

Mit den Gln. (A1-21) und (A3-6) lauten die Bewegungsgleichungen für ein System von Körpern im Gravitationsfeld

$$\begin{aligned} (K + \Psi) \dot{\omega} + \tilde{\omega} K \omega - M \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{B}_{ij} \Theta^{(i)} \Theta^{(j)\top} \tilde{\omega}^{(j)} \tilde{\omega}^{(j)} B_{ji} \right\|_{i=1, \dots, n} &= \\ = \frac{\kappa}{r_0^3} \left[ 3 \tilde{\Theta}_3 K \Theta_3 + M \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^n \tilde{B}_{ij} (\Theta^{(i)} \Theta^{(j)\top} - 3 \Theta_3^{(i)} \Theta_3^{(j)\top}) B_{ji} \right\|_{i=1, \dots, n} \right] &+ \\ + \vec{e} \odot S \parallel \vec{Y}_a \parallel_{a=1, \dots, n-1} . \end{aligned} \quad (\text{A4-1})$$

Diese Gleichungen sind identisch mit den Gln. (1.6-1) und (1.6-2).



## Literatur

- [1] *L. Euler*: Recherches sur la Précession des Equinoxes, et sur la Nutation de l'Axe de la Terre. Mem. Akad. d. Wiss. Berlin 5 (1749), 289—329.
- [2] *J. le R. d'Alembert*: Recherches sur la Précession des Equinoxes, et sur la Nutation de l'Axe de la Terre, dans le Système Newtonien. David, Paris, 1749.
- [3] *J. L. Lagrange*: Théorie de la Libration de la Lune. Oeuvres V, 5—121.
- [4] *Poisson*: Connaissance des Temps, 1837, Mémoire de l'Académie des Sciences, 1838.
- [5] *R. E. Roberson*: Generalized Gravity Gradient Torques. AAS Goddard Memorial Symposium, Wash., D. C., 1962.
- [6] *A. I. Lur'e*: The Moment of Gravitational Forces Acting on a Satellite. PMM 27 (1963), 377—378.
- [7] *D. B. de Bra* und *R. H. Delp*: Rigid Body Attitude Stability and Natural Frequencies in Circular Orbits. J. Astronaut. Sci. 8 (1961), 14—17.
- [8] *R. Pringle*: On the Capture, Stability and Passive Damping of Artificial Satellites. Diss. Stanford Univ. 1964.
- [9] *V. V. Belezkij*: Dvishenie iskusstvennovo sputnika otnositelno zentra mass. Moskau, 1965.
- [10] *D. B. de Bra*: The Large Attitude Motions and Stability, Due to Gravity, of a Satellite with Passive Damping in an Orbit of Arbitrary Excentricity About an Oblate Body. Diss. Stanford Univ. 1962.
- [11] *W. T. Thomson*: Spin Stabilisation of Attitude Against Gravity Torque. J. Astronaut. Sci., vol. 9, No. 2 (1962), 31—33.
- [12] *T. B. Garber*: The Precession of Spinning Bodies Due to Gravitational Gradient Torques. The Rand Corp., Memorandum RM-3191-PR, June 1962.
- [13] *H. B. Schechter*: Satellite Librations on an Elliptic Orbit. The Rand Corp., Memorandum RM-3632-PR, May 1962.
- [14] *R. H. Frick*: Perturbations of Equatorial Satellites Due to Equatorial Ellipticity. The Rand Corp., Memorandum RM-3861-NASA, Sept. 1963.
- [15] *R. H. Frick* und *T. B. Garber*: General Equations of Motion of a Satellite in a Gravitational Gradient Field. The Rand Corp., Memorandum RM-2527, Dec. 1959.
- [16] *H. J. Fletcher*, *L. Ronqvist* und *E. Y. Yu*: Dynamics Analysis of a Two-Body Gravitationally Oriented Satellite. Bell Syst. Tech. J. 42 (1963), 2239—2266.
- [17] *J. L. Synge*: On the Behavior, According to Newtonian Theory, of a Plumb Line or Pendulum Attached to an Artificial Satellite. Proc. Royal Irish Acad. 60 A, 1—10 (1959).
- [18] *E. E. Zajac*: Damping of a Gravitationally Oriented Two-Body Satellite. ARS Journal 32, No. 12 (1962).
- [19] *M. J. Abzug*: Attitude Control of Multiple-Part Satellites. Diss. Univ. of Calif. L. A., 1962.
- [20] *R. E. Roberson*: Attitude Control of Satellites and Space Vehicles. Advances in Space Sci., vol. 2, Academic Press N. Y., 1960, 351—436.
- [21] *C. Grubin*: Dynamics of a Vehicle Containing Moving Parts. J. Appl. Mech. 84 (1962), 486—488.
- [22] *A. I. Lur'e*: Some Problems in the Dynamics of a System of Solid Bodies. Trans. Leningr. Polytech. Inst., Nr. 210 (1960), 7—22.
- [23] *R. G. Moyer* und *H. F. Foulke*: Gravity Gradient Stabilisation of Synchronous Satellites. IEEE 11th East Coast Conf. Aerospace and Navigational Electronics, Baltimore, Oct. 1964.
- [24] *H. W. Hooker* und *G. Margoulis*: The Dynamical Attitude Equations for an n-Body Satellite. J. Astronaut. Sci. 1965.
- [25] *R. E. Roberson* und *J. Wittenburg*: A Dynamical Formalism for an Arbitrary Number of Interconnected Rigid Bodies, with Reference to the Problem of Satellite Attitude Control. Proc. 3rd Congress Int. Fed. Auto. Control (London, 1966).

- [26] *A. I. Lur'e*: Analititscheskaja Mechanika. Moskau 1961.
- [27] *L. Boltzmann*: Über die Form der Lagrange'schen Gleichungen für nichtholonome generalisierte Koordinaten. Sitzungsberichte der Wiener Akad. d. Wiss., 111, Dez. 1902.
- [28] *G. Hamel*: Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik. Zeitschr. f. Math. und Phys. 50, 1904.
- [29] *G. Margoulis*: On Real Four-Parameter Representations of Satellite Attitude Motions. Philco Corp., Palo Alto, Calif., Rep. No. 52, Sept. 1963.
- [30] *N. G. Chetaev*: The Stability of Motion. Pergamon Press, 1961.
- [31] *D. R. Merkin*: Gyroscopic Systems. Old Burne, 1964.
- [32] *E. E. Zajac*: The Kelvin-Tait-Chetaev Theorem and Extensions. J. Astronaut. Sci., vol. XI, No. 2 (1964), 46—49.
- [33] *R. L. Halfman*: Dynamics. Vol. 1, Addison-Wesley Publish. Comp.